Model 2 test admitere Automatică şi Calculatoare

1. Pentru un număr real y, notăm cu $\{y\}$ partea sa fracţionară. Valoarea limitei

$$\ell = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \cdot \int_0^t \{x\}^{2015}\ dx$$

este:

(a) 2016; (b) ∞; (c) 0; (d) $\frac{1}{2016}$.

2. Valoarea integralei

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\ dx$$

este:

(a) 0; (b) $\frac{\pi}{2}$; (c) $\frac{\pi}{4}$; (d) π.

3. Considerăm funcţia $f : [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = \sqrt[p]{x}$, unde $p \geq 1$. Notăm cu V_{Ox} şi, respectiv, V_{Oy}, volumele corpurilor de rotaţie obţinute prin rotirea graficului funcţiei f în jurul axei Ox şi, respectiv, în jurul axei Oy. Atunci valoarea lui p pentru care

$$\frac{V_{Ox}}{V_{Oy}} = 6$$

este:

(a) 3; (b) 2; (c) 5; (d) 4.

4. Valoarea limitei

$$\ell = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\ldots+\frac{1}{3n}}$$

este:

(a) 2; (b) 1; (c) ∞; (d) $\frac{3}{2}$.

5. Pentru un număr real y, notăm cu $[y]$ partea sa întreagă. Valoarea limitei

$$\ell = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{2016}} \cdot \int_0^x [y]^{2015}\ dy$$

este:

(a) 2016; (b) ∞; (c) 0; (d) $\frac{1}{2016}$.

6. Fie, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, integrala

$$I_n = \int_0^1 x \cdot \{nx\}\ dx,$$

unde cu $\{y\}$ notăm partea fracţionară a numărului real y. Atunci $\lim_{n\to\infty} I_n$:
(a) nu există; (b) are valoarea $\frac{1}{4}$; (c) are valoarea 0; (d) are valoarea $\frac{1}{2}$.

7. Fie $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ primitiva funcţiei $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$ pe $[0,\infty)$ care satisface $F(1) = \frac{\pi}{2}$. Atunci $F(0)$ este egală cu:
(a) 2016; (b) 1; (c) 0; (d) $\frac{\pi}{2}$.

8. Valoarea limitei

$$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^3 x - x^3}{x^5}$$

este:
(a) $\frac{1}{4}$; (b) 1; (c) 0; (d) $\frac{1}{2}$.

9. Coordonatele punctului $P(a,b)$ situat pe graficul funcţiei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ pentru care tangenta la grafic dusă prin P este paralelă cu dreapta ce trece prin punctele $A(1,1)$ şi $B\left(4, \frac{1}{4}\right)$ sunt:
(a) $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; (b) $\left(2, \frac{1}{2}\right)$; (c) $\left(3, \frac{1}{3}\right)$; (d) $\left(\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

10. Considerăm şirul dat prin

$$x_0 = 1,\ x_{n+1} = \sin x_n,\ n \geq 0.$$

Atunci limita şirului (x_n) are valoarea:
(a) 0; (b) 1; (c) $\sin 1$; (d) $\frac{1}{2}$.

11. Fie C punctul de intersecţie a dreptelor de ecuaţii

$$(d_1) : y - 2x + 1 = 0, \quad (d_2) : y + 2x - 3 = 0.$$

Notăm cu M punctul de pe cercul cu centrul în C şi de rază 2 care este cel mai apropiat de punctul $A(2,0)$. Atunci M are coordonatele:

(a) $(1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$; (b) $(1+\sqrt{3}, 0)$; (c) $(2, 1-\sqrt{3})$; (d) $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$.

12. Fie $\mathcal{C}$ cercul circumscris ΔABC, unde $A(-1,0)$, $B(0,1)$, $C(6,1)$. Atunci punctul de pe cercul $\mathcal{C}$ aflat la distanţa maximă faţă de axa Oy are coordonatele:
(a) $(8,-3)$; (b) $(7,0)$; (c) $(3,-3)$; (d) $(7,-3)$.

13. Fie punctele $A(-1,0)$, $B(0,1)$. Notăm $\mathcal{D} = \{M \text{ punct din plan} \mid MA + MB = 4\}$. Atunci distanţa maximă între două puncte ale mulţimii $\mathcal{D}$ este:
(a) 2; (b) $4\sqrt{3}$; (c) $4\sqrt{3}$; (d) $2\sqrt{2}$.

14. Pentru fiecare $m \in \mathbb{R}$, considerăm triunghiul determinat de dreapta de ecuaţie $x + y - m = 0$ şi axele de coordonate şi notăm cu $P(m)$ pătratul lungimii razei cercului circumscris acestui triunghi. Atunci suma

$$S = P(1) + P(\sqrt{2}) + P(\sqrt{3}) + ... + P(\sqrt{12})$$

este divizibilă cu:
(a) 7; (b) 5; (c) 13; (d) 11.

15. În planul xOy considerăm punctele $A(3,\sqrt{3})$ şi $B(4,0)$. Atunci unghiul dintre înălţimea şi mediana ΔAOB care pleacă din unghiul A are măsura egală cu:
(a) $\frac{\pi}{12}$; (b) $\frac{\pi}{4}$; (c) $\frac{\pi}{3}$; (d) $\frac{\pi}{6}$.

16. În planul xOy considerăm punctele $A(0,1)$ şi $B(2,0)$. Coordonatele punctului M aflat pe mediana AD a triunghiului AOB pentru care

$$MO^2 + MA^2 + MB^2$$

este minimă sunt:
(a) $(0,1)$; (b) $(1,0)$; (c) $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$; (d) $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

17. Notăm cu A şi B punctele în care graficul funcţiei

$$f_m(x) = x^2 - 2(m-1)x - m$$

intersectează axa Ox, unde m este un parametru real. Valoarea lui m pentru care lungimea segmentului $[AB]$ este minimă este:
(a) $\frac{1}{2}$; (b) $\frac{1}{4}$; (c) 0; (d) 1.

18. Se consideră ecuaţia de gradul al doilea

$$(1+\alpha^2)x^2-(1+\alpha)x+\alpha(1-\alpha)=0,$$

cu rădăcinile $x_1, x_2 \neq 0$. Mulţimea tuturor valorilor lui $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care

$$-1 \leq \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1 x_2} \leq 0$$

este:
(a) $(-\infty, 1]$; (b) $(-\infty,-1) \cup (0,1)$; (c) $(-\infty,-1]$; (d) $(-\infty, 0) \cup (1,+\infty)$.

19. Mulţimea tuturor soluţiilor inecuaţiei

$$2^{2x}-13\cdot 6^{x-1}+9^x \leq 0$$

este:
(a) $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$; (b) $(-\infty,-1]$; (c) $(-\infty,1]$; (d) $[-1,1]$.

20. Mulţimea tuturor soluţiilor inecuaţiei

$$\log_3\left(3^x+6\right)\cdot \log_{\frac{1}{3}}\left(3^{x+1}+18\right) < -6$$

este:
(a) $[1,+\infty)$; (b) $(-\infty,1]$; (c) $(1,+\infty)$; (d) $(-\infty,1)$.

21. Termenul care nu îl conţine pe x din dezvoltarea

$$\left(\sqrt[6]{\frac{1}{x}}+\sqrt[10]{x}\right)^n,$$

ştiind că suma coeficienţilor binomiali este 256, are valoarea:
(a) 28; (b) 56; (c) 8; (d) 70.

22. Numărul de elemente ale mulţimii

$$A=\left\{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N} : z=(\sqrt[4]{3}+i\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3}+i^2\sqrt[4]{2})\cdot \ldots \cdot(\sqrt[4]{3}+i^{4n}\sqrt[4]{2})\right\}$$

este:
(a) infinit; (b) 1; (c) 3; (d) 2.

23. Valoarea parametrului real α pentru care rădăcinile polinomului

$$X^3 - \alpha X^2 + 14x - 8$$

sunt în progresie geometrică este:
(a) 5; (b) 6; (c) 7; (d) 8.

24. Mulţimea tuturor valorilor parametrului $a \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul $X^3 - 3X + a$ are număr maxim de rădăcini întregi este:
(a) $\mathbb{R}$; (b) $\{\pm 2\}$; (c) $\{2\}$; (d) $\{-2\}$.

25. Fie matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2x & 0 \\ 0 & 4x+1 & 0 \\ 0 & 3x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este un parametru real. Mulţimea valorilor lui x pentru care $A(x)$ este egală cu inversa sa este:
(a) nu există; (b) $\left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$; (c) $\{0\}$; (d) $\left\{0, \pm\frac{1}{2}\right\}$.

26. Presupunem că x_1, x_2, x_3, x_4 sunt 4 numere consecutive. Determinantul

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 1+x_4 \end{vmatrix}$$

este de forma:
(a) $4k$; (b) $4k+1$; (c) $4k+2$; (d) $4k+3$.

27. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Media geometrică a rădăcinilor ecuaţiei:

$$\det\left(A^3 - xI_3\right) = 0$$

este:
(a) 0; (b) 1; (c) -4; (d) -2.

28. Fie A o matrice de ordinul 3 cu elementele egale cu ± 1. Atunci valoarea maximă pentru $\det A$ este:
(a) 2; (b) 4; (c) 6; (d) 8.

29. Fie $M = \{x; x \in \mathbb{R},\ x \geq 1\}$ şi operaţia internă

$$x * y = xy + \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}, \quad \forall x, y \in M.$$

Să se precizeze care din următoarele afirmaţii este adevărată:

(a) elementul neutru este 1, singurul element care are invers este 1;
(b) elementul neutru este 1, nici un element nu are invers;
(c) nu există element neutru;
(d) da, elementul neutru este 1, toate elementele sunt inversabile.

30. Mulţimea tuturor valorilor parametrului $a \in \mathbb{Z}_7$ pentru care polinomul

$$f = X^6 + aX + \hat{5}$$

este reductibil este:

(a) $\{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$;   (b) $\mathbb{Z}_7 \setminus \{\hat{0}\}$;   (c) $\emptyset$;   (d) $\mathbb{Z}_7$.