TEST MODEL 4 REZOLVARI

1. A existat un misprint în testul propus!!! Varianta corectă este:
Să se calculeze
$I = \int_0^1 \left[\frac{x^3+3x^2+2x+1}{8}\right] dx$,unde $[u]$ este partea întreagă a lui u.
(a) $I = \frac{3}{4}$;**(b)** $I = 0$;**(c)** $I = \frac{1}{3}$;**(d)** $I = \frac{4}{3}$.

Se observă că funcţia $f(x) = \frac{x^3+3x^2+2x+1}{8}$ este strict crescătoare pe intervalul $[0,1]$, având valoarea maximă egală cu $\frac{7}{8}$. Atunci

$$\int_0^1 \left[\frac{x^3+3x^2+2x+1}{8}\right] dx = \int_0^1 0\ dx = 0.$$

Răspuns corect (b).

2. $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (a_1 + (k-1)r)^2 =$
$= \sum_{k=1}^{n} \left[a_1^2 + 2a_1(k-1)r + (k-1)^2 r^2\right] =$
$= a_1^2 \sum_{k=1}^{n} 1 + 2a_1 r \sum_{k=1}^{n} (k-1) + r^2 \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 =$
$= a_1^2 \cdot n + 2a_1 r \cdot \frac{(n-1)n}{2} + r^2 \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$
$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow$
$a_1^2 \cdot n + 2a_1 r \cdot \frac{(n-1)n}{2} + r^2 \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{n(4n^2-1)}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$
Se identifică coeficienţii puterilor lui n. Progresia aritmetică fiind crescătoare, se alege $r > 0$.
Atunci $a_1 = 1, r = 2$.
Răspuns corect (a).

3. Legilor de asociere pentru funcţiile cerute le corespund numere. De exemplu, pentru f definită de $f(1) = 1, f(2) = 1, f(7) = 8$ corepunde 118.
Atunci:
-încep cu 1: $8 + 7 + 6 + ... + 2 + 1 = \frac{8 \cdot 9}{2} = C_9^2$

111	112	113	114	115	116	117	118
	122	123	124	125	126	127	128
		133	134	135	136	137	138
					...	...	...
						177	178
							188

-încep cu 2: $7 + 6 + ... + 2 + 1 = \frac{7 \cdot 8}{2} = C_8^2$

222	223	224	225	226	227	228
	233	234	235	236	237	238
				...	...	...
					277	278
						288

...
-încep cu 8: $1 = C_2^2$

888

În total: $C_9^2 + C_8^2 + ... + C_2^2 = 120$
Răspuns corect (b).

4. Pentru $x \in \left(\frac{-1}{2}, \infty\right)$,
$f^3(x) + f'(x) = 0 \Rightarrow \int \frac{-f'(x)}{f^3(x)}dx = \int 1dx \Rightarrow \frac{1}{2f^2(x)} = x + c, \forall c \in \mathbb{R}.$
$f(0) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$ şi $f(x) = +\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$.
Răspuns corect (a).

5. Fie $f : (0,2) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{x^2+2x}$. Atunci $f^{(4)}(1)$ are valoarea:
(a) $4!\left(1 - \frac{1}{3^5}\right)$; **(b)** $\frac{242}{243}$; **(c)** $24\left(1 + \frac{1}{3^5}\right)$; **(d)** $6\left(1 - \frac{1}{3^4}\right)$.
Rezolvare:
$f(x) = \frac{2}{x^2+2x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} = x^{-1} - (x+2)^{-1}$.
$f'(x) = (-1)x^{-2} - (-1)(x+2)^{-2}$.
$f''(x) = (-1)(-2)x^{-3} - (-1)(-2)(x+2)^{-3}$.
$f'''(x) = (-1)(-2)(-3)x^{-4} - (-1)(-2)(-3)(x+2)^{-4}$.
$f^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)(-4)x^{-5} - (-1)(-2)(-3)(-4)(x+2)^{-5}$.
$f^{(4)}(x) = 4!\frac{1}{x^5} - 4!\frac{1}{(x+2)^5}$
$f^{(4)}(1) = 4!\left(1 - \frac{1}{3^5}\right) = 24 \cdot \frac{242}{243} = \frac{1936}{81}$.
Răspuns corect (d).

6.$x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \cos x > 0, \sin x < 0$.
$y \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x < 0, \sin x < 0$.
$\sin x = -\sqrt{1-\cos^2 x} = \frac{-3}{5}; \sin y = -\sqrt{1-\cos^2 y} = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$ şi
$\sin 2x = 2\sin x\cos x = \frac{-24}{25}$.
Atunci
$\sin(2x+y) = \sin 2x\cos y + \sin y\cos 2x = \frac{24-14\sqrt{2}}{75}$.
Răspuns corect (b).

7. $\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j}$ sunt perpendiculari$\Rightarrow$
$-1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \cdot m = 0 \Rightarrow m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
$E = -2 + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{4}$.
Răspuns corect (a).

8. $35^x - 25^x = 28^x - 20^x + 21^x - 15^x \Leftrightarrow (7^x - 5^x)(5^x - 4^x - 3^x) = 0$
$7^x = 5^x$ are soluţia unică $x = 0$.
$5^x = 4^x + 3^x$ are soluţia unică $x = 2$.
Răspuns corect (d).

9.$C.E.\left\{\ x > 0\right.$-se verifică pentru $x \in (0,1) \quad \Rightarrow$
$\left(\frac{1}{16}\right)^{8+\log_a x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_a^2 x} \Rightarrow 2^{-4(8+\log_a x)} > 2^{-\log_a^2 x} \Rightarrow$
$\Rightarrow 32 + 4\log_a x < \log_a^2 x \Rightarrow \log_a^2 x - 4\log_a x - 32 > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (\log_a x - 8)(\log_a x + 4) > 0 \Rightarrow \log_a x \in (-\infty, -4) \cup (8, \infty)$.
Pentru $a \in (0,1) \overset{x\in(0,1)}{\Rightarrow} M = \left(0, a^8\right)$
Răspuns corect (c).

10. Dacă $x \leq 2,018 \Rightarrow$
$-x + 2,018 \leq 3 - x \Rightarrow 2,018 \leq 3$ Se verifică, $\forall x \leq 2,018$.
Dacă $x > 2,018 \Rightarrow$
$x - 2,018 \leq 3 - x \Rightarrow 2x \leq 5,018 \Rightarrow x \leq 2,509$.
Deci $A = (-\infty, 2,018] \cup (2,018, 2,509] = (-\infty, 2,509]$.
În A sunt următoarele numere întregi mai mari decât $-2,018 : -2, -1, 0, 1, 2$.
Răspuns corect (a).

11. Se determină elementul neutru al grupului:
$A * \Theta = \Theta * A = A \Rightarrow \Theta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_3$.

Se determină pentru M elementul simetric $M' = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & x & 0 \\ z & y & x \end{pmatrix} \in G$, astfel încât
$M * M' = M' * M = \Theta$

$$M \cdot M' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & x & 0 \\ z & y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x & 0 & 0 \\ -2x - 3y & -3x & 0 \\ -x - 2y - 3z & -2x - 3y & -3x \end{pmatrix}$$

$$M + M' + I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & x & 0 \\ z & y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ y-2 & x-2 & 0 \\ z-1 & y-2 & x-2 \end{pmatrix}$$

$M * M' = \Theta \Leftrightarrow M \cdot M' + 2(M + M' + I_3) = \Theta \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} -x-4 & 0 & 0 \\ -2x-y-4 & -x-4 & 0 \\ -x-2y-z-2 & -2x-y-4 & -x-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x-4=-1 \\ -2x-y-4=0 \\ -x-2y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \\ z=-3 \end{cases}$$

Răspuns corect (b).

12.

Din grafic rezultă că f este surjectivă pe $\mathbb{R}$, nu este injectivă pe $\mathbb{R}$, nu este monotonă pe $\mathbb{R}$.

Răspuns corect (a).

13. $A = \int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{4}} \cos\sqrt{x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)(2t)\,dt = (2t\sin t + \cos t)\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}^{t=\frac{\pi}{2}} = \pi - \frac{1}{4}\sqrt{2}\pi - \sqrt{2}$

$= \pi - \frac{1}{4}\sqrt{2}\pi - \sqrt{2}.$

Răspuns corect (a).

14. card $\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n}\right\} = n+1 \Rightarrow f \in \mathcal{R}([0,1])$.

$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx + ... + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx =$

$$= \frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{1}{n}} + ... + \frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=\frac{1}{3}}^{x=\frac{1}{2}} + \frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=\frac{1}{2}}^{x=1} = \frac{1}{2}.$$

Răspuns corect (b).

15.$\Delta = -3m^2 + 6m + 1$.

$\Delta < 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 6m + 1 < 0 \Leftrightarrow 3m^2 - 6m - 1 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m \in \left(-\infty, 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.

Răspuns corect (d).

16. Se observă că $x_1 = -i$ este soluţie$\Rightarrow$

$$x^3 = i \Leftrightarrow (x+i)\left(x^2 - ix - 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -i \\ x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i \\ x_3 = +\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i \end{cases}$$

Răspuns corect (c).

17.

$$C.E. \begin{cases} x \geq 4 \\ x+1 \geq 3 \\ x \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \\ x \in (-\infty, 3) \\ x \in (-4,+\infty), x \neq -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow D_{C.E} = \{x \in \mathbb{N}; x \geq 4\}$.

Atunci

$$23\frac{x!}{(x-4)!} = 24\left[\frac{(x+1)!}{(x-2)!} - \frac{x!}{(x-4)!\cdot 4!}\right] \Leftrightarrow$$

$$23 + 1 = 24\frac{x+1}{(x-3)(x-2)} \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

Răspuns corect (c).

18. Fie $M(\alpha,\beta)$ un punct mobil pe $(d): bx+ay-ab=0 \Rightarrow M\left(\alpha, \dfrac{b(a-\alpha)}{a}\right)$.

Atunci $G(x_G, y_G)$ are coordonatele

$$\begin{cases} x = x_G = \dfrac{x_A+x_B+x_M}{3} = \dfrac{2a+0+\alpha}{3} \\ y = y_G = \dfrac{y_A+y_B+y_M}{3} = \dfrac{0+2b+\dfrac{b(a-\alpha)}{a}}{3} \end{cases}$$

Eliminând $\alpha \Rightarrow 3x-2a = \dfrac{3ab-3ay}{b} \Rightarrow$

$(d'): 3xb+3ay-5ab=0.$

Răspuns corect (d).

19.

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2017^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$I_3 \cdot A = A \cdot I_3 \Rightarrow B = (I_3)^3 + A^3 = I_3$

$\det\left(A + B^{2017}\right) = 1.$

Răspuns corect (a).

20.

$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} - 10\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} + 17\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^{2018} = I_2$

$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 84 & 512 \end{pmatrix}.$

$c = 8+512+84 = 604$

Răspuns corect (a).

21. În $\mathbb{Z}_5$ toate elementele nenule sunt inversabile. Atunci

$\Delta = \begin{vmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{2} & \widehat{3} & \widehat{1} \\ -\widehat{1} & -\widehat{1} & \widehat{3} \end{vmatrix} = \widehat{4} \neq \widehat{0} \Rightarrow \Delta^{-1} = \widehat{4}.$

$\Delta_x = \widehat{4}; \Delta_y = \widehat{3}; \Delta_z = \widehat{2}.$

$x = \widehat{4}\cdot\widehat{4} = \widehat{1};$

$y = \widehat{4}\cdot\widehat{3} = \widehat{2};$

$z = \widehat{4}\cdot\widehat{2} = \widehat{3}.$

$p = \widehat{1}\cdot\widehat{2}\cdot\widehat{3} = \widehat{1}.$

Răspuns corect (a).

22.

$C.E. \begin{cases} x \geq 0 \\ -1 \leq \sqrt{x} \leq 1 \\ e-x > 0 \\ 1-\ln(e-x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [0,1] \\ x \in (-\infty, e) \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow D_E = (0,1]$

Pe domeniul de existenţă, f este continuă.

Răspuns corect (c).

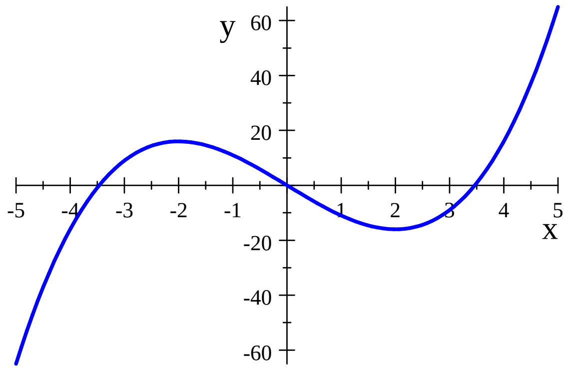
23. $a_n = \dfrac{-1}{7} \cdot \dfrac{\left(\frac{-1}{7}\right)^n - 1}{\frac{-1}{7} - 1} \Rightarrow$
$l_1 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{-1}{7} \cdot \dfrac{0-1}{\frac{-1}{7} - 1} = -\frac{1}{8}$.
$b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{(k+1)!} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left[\dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{(k+1)!}\right] = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!} \Rightarrow$
$l_2 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1 - 0 = 1$.
Răspuns corect (c).

24. $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} \cdot \dfrac{(2n)!}{[n!]^2} = \dfrac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \Rightarrow$
$l_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{4}$.
$y_n = \left[\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right]^{\dfrac{\ln n}{n^2}} \Rightarrow$
$l_2 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = e^0 = 1$.
Răspuns corect (c).

25. Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(t) = \ln\left(1 + \sin^2 t\right)$. Deoarece g este continuă pe $\mathbb{R}$, funcţia admite primitive pe $\mathbb{R}$, chiar dacă acestea nu pot fi exprimate cu funcţii elementare. Fie G o astfel de primitivă. Atunci
$f(x) = G(\arcsin x) - G\left(\frac{\pi}{4}\right), \forall x \in (-1,1) \Rightarrow$
$f'(x) = [G'(\arcsin x)](\arcsin x)' - 0 =$
$= [g(\arcsin x)] \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in (-1,1)$.
Răspuns corect (b).

26. $p = -1$.
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}, x<\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}, x<\frac{\pi}{2}} [-a \cdot \cos 0] = -a$.
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}, x>\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt[3]{\sin x} - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}, x>\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x - 1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\left(\left(\sqrt[3]{\sin x}\right)^2 + \sqrt[3]{\sin x} + 1\right)} = 0.$
$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -a$.
Răspuns corect (c).

27. Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 12x$ este



$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3\left(x^2 - 4\right)$
$f''(x) = 6x$

x	$-\infty$ $\qquad$ -2 $\qquad$ 0 $\qquad$ 2 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+ \; + \; + \; + \; 0 \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; 0 \; + \; + \; + \; + \; +$
$f''(x)$	$- \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; 0 \; + \; + \; + \; + \; + \; + \; + \; + \; +$
$f(x)$	$-\infty \; \nearrow\frown \; 16 \; \searrow\frown \; 0 \; \searrow\smile \; -16 \; \nearrow\smile \; +\infty$

Puncte de extrem local $(-2, 16)$ şi $(2, -16)$.
Răspuns corect (a).

28. C simetricul lui A faţă de $B \Rightarrow B$ este mijlocul segmentului $[AC] \Rightarrow$

$$\begin{cases} 3 = \dfrac{1 + x_C}{2} \\ 4 = \dfrac{2 + y_C}{2} \end{cases} \Rightarrow C(5, 6).$$

Dreapta care trece prin A şi B are panta $m_{AB} = \dfrac{4-2}{3-1} = 1 \Rightarrow$
Perendiculara pe AB are panta $m_d = -1$.
Dreapta din enunţ are ecuaţia:
$(d) : y - 6 = -1(x - 5) \Leftrightarrow$
$(d) : x + y - 11 = 0$
Răspuns corect (d).

29. $AB = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-2)^2} = 3\sqrt{2}$
$BC = \sqrt{(1-0)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{10}$
$CA = \sqrt{(0+2)^2 + (5+1)^2} = 2\sqrt{10}$
$BC < AB < CA \Rightarrow m\left(\widehat{A}\right) < m\left(\widehat{C}\right) < m\left(\widehat{B}\right)$.
Sau prin calcul: $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|}$, unde α este măsura în radiani a $\widehat{A}$, ş.a.m.d.
Răspuns corect (d).

30. $z = \frac{^{1+i)}1+i}{1-i} = i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
$z^n = 1^n\left(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}\right)$
Răspuns corect (c).