Modele teste admitere - matematică

Soluţii testul 1

1. Răspuns corect: (b).

   Soluţie.

   $$\frac{k^2+k}{n^3+n^2} < \frac{k^2+k}{n^3+k^2} < \frac{k^2+k}{n^3+1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k}{n^3+n^2} < a_n < \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k}{n^3+1}.$$

2. Răspuns corect: (c).

   Soluţie. Se explicitează

   $$x_n = \begin{cases} \frac{3}{2n+1}, & n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{2n-1}, & n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

   Se observă că $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ este subşir descrescător şi $(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ este subşir descrescător $\Rightarrow \max\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = \max(x_0, x_1) = \max(3,1) = 3 \Rightarrow (d)$ e fals. De asemenea, se observă că $0 < x_n \leq 3, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ $\Rightarrow (x_n)_n$ e şir mărginit. Mai mult $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow (b)$ e fals. Cum $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite subşirul $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ descrescător$\Rightarrow (x_n)_n$ nu poate fi şir crescător $\Rightarrow (a)$ e fals.

3. Răspuns corect: (a).

   Soluţie. Considerând şiruri de argumente raţionale respectiv iraţionale se constată că punctele de continuitate sunt doar cele unde $x^2 = x$.

4. Răspuns corect: (b).

   Soluţie.

   Se calculează integrala

   $$I(a) = \int_2^a \frac{x}{x^3-1}dx = \int_2^a \left(\frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{\frac{-1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2+x+1}\right)dx =$$

   $$= \left(\frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_2^a =$$

   $$= \frac{1}{3}\ln(a-1) - \frac{1}{6}\ln(a^2+a+1) + \frac{1}{6}\ln 7 +$$

   $$+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}(2a+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

5. Răspuns corect: (a).

Soluţie.

$\sigma_{\Delta_n}(f, \frac{k}{n}) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{n}{n}}}\right)$ reprezintă suma Riemann asociată funcţiei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ şi diviziunii echidistante a intervalului $[0,1]$,

$\Delta_n = \left(x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < \cdots < x_n = \frac{n}{n} = 1\right)$.

Deci,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right) =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = 2(\sqrt{2}-1).$$

6. Răspuns corect: (d).

Soluţie. Parabolele se intersectează în punctele $(0,0)$ şi $\left(\sqrt[3]{ab^2}, \sqrt[3]{a^2b}\right)$.

Atunci aria este egală cu $\int_0^{\sqrt[3]{ab^2}} \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{b}\right) dx = \frac{1}{3}ab.$

7. Răspuns corect: (c).

Soluţie.

Se studiază ca o inecuaţie în x şi se pune condiţia $\Delta < 0$ pentru orice y real, adică

$$y^2 - 4y + m - 4 > 0, \forall y \in \mathbb{R}.$$

8. Răspuns corect: (b).

Soluţie.

Varianta I. Membrii stângi ai ecuaţiilor fiind polinoame omogene, se amplifică prima ecuaţie cu 13 şi se adună la a doua, de unde se obţine:

$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{y}\right) + 2 = 0$ etc.

Varianta II. Se amplifică prima ecuaţie cu 3 şi se scade din a doua, de unde se obţine $xy = 2$. Se amplifică a doua ecuaţie cu 3 şi se scade din prima, de unde se obţine $x^2 + y^2 = 5$. Notăm $x + y = s$, $xy = p$ şi atunci relaţiile date conduc la sistemul

$$\begin{cases} p = 2 \\ s^2 - 2p = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = -3 \\ p = 2 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} s = 3 \\ p = 2 \end{cases}$$

Din $z^2 + 3z + 2 = 0 \Rightarrow (x_1, y_1) = (-1, -2)$ sau $(x_2, y_2) = (-2, -1)$.

Din $z^2 - 3z + 2 = 0 \Rightarrow (x_3, y_3) = (1, 2)$ sau $(x_4, y_4) = (2, 1)$.

9. Răspuns corect: (a).

   Soluţie. Existenţa radicalilor impune $x \geq \frac{1}{3}$. Inecuaţia se scrie echivalent

   $$\sqrt{3x - 1} + 1 > \sqrt{3x + 1}$$

   şi se elimină radicalii ridicând la pătrat.

10. Răspuns corect: (d).

    Soluţie. Scriem $A = B + C$, unde $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_3$,

    $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

    Cum $B \cdot C = C \cdot B \Rightarrow A^n = C_n^0 B^n I_3 + C_n^1 B^{n-1} C + C_n^2 B^{n-2} C^2 + O$, deoarece

    $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $n \geq 3$.

11. Răspuns corect: (c).

    Soluţie. Fie $s = x_1 + x_2 + x_3 = 2$ şi $q = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 2$. Calculând determinantul obţinem $s(3q - s^2) = 4$.

12. Răspuns corect: (a).

    Soluţie. Verificăm că 1 este element neutru. Observăm că legea este comutativă. Determinăm elementele inversabile: $x * y = 1 \Rightarrow y = x$, fiecare element este egal cu inversul său.

13. Răspuns corect: (c).

    Soluţie. Ecuaţiile doi şi trei se obţin din prima prin înmulţire cu ε, respectiv ε^2. Rezultă $x = -\varepsilon y - \varepsilon^2 z$.

14. Răspuns corect: (a).

    Soluţie. Punctul de intersecţie al celor două drepte este $(9,2)$. Panta dreptei căutate este $-\frac{3}{2}$.

15. Răspuns corect: (d).

    Soluţie. Punctele de intersecţie ale dreptei cu axele de coordonate sunt $B(0,8)$ şi $C(4,0)$.

16. Răspuns corect: (a).

    Soluţie. Se transformă $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ şi se înlocuieşte în ecuaţia dată. Se obţine $\cos x - \sin x + 2\sin^2 x + 2\cos^2 x = 2\cos^2 x + 2\sin x\cos x$ etc., care are soluţiile $x = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\} \cup \left\{(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

17. Răspuns corect: (c).

    Soluţie. Se notează $t = x^2 - 4x + 5$. Inecuaţia devine
    $\frac{5t^2+t-4}{t} \geq 0 \Leftrightarrow t \in [-1,0) \cup \left[\frac{4}{5}, \infty\right)$. Rezultă inegalităţile
    $x^2 - 4x + 5 < 0 \Rightarrow$ nu are soluţii.
    $x^2 - 4x + 5 \geq \frac{4}{5} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$.

18. Răspuns corect: (a).

    Soluţie. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{2\ln n}{n}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln n}{n}} = e^o = 1.$

19. Răspuns corect: (b).

    Soluţie. $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ka & 1 \end{pmatrix}$

    $A + A^2 + ... + A^n = \begin{pmatrix} n & 0 \\ \frac{n(n+1)}{2}a & n \end{pmatrix}$

    $\det\left(A + A^2 + ... + A^{100}\right) = n^2$.

20. Răspuns corect: (c)

    Soluţie. $\sum\limits_{k=1}^{2018}\left[\frac{100}{2^k}\right] = 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97.$

21. Răspuns corect: (a).

    Soluţie. Fie $z = x + iy$. Atunci $(x+iy)^2 + 2\left(x^2+y^2\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow$
    $\begin{cases} 2xy = 0 \\ 3x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$

    Soluţiile sunt $z = i,\ z = -i,\ z = -\frac{1}{3}\sqrt{3},\ z = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

22. Răspuns corect: (a).

Soluţie. $f'(x) = \left(\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right)' = \dfrac{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}\frac{1}{2}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{1}{\cos x}$.

23. Răspuns corect: (b).

Soluţie. $a + b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1 - a$

$E = a^2 + (-1-a)^2 = 2a^2 + 2a + 1$

$a_{\min} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}, E_{\min} = \frac{1}{2}$.

24. Răspuns corect: (d).

Soluţie. $\pi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\pi^2$.

25. Răspuns corect: (b).

Soluţie. ABC triunghi dreptunghic

$r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{\frac{3\cdot 4}{2}}{\frac{3+4+5}{2}} = 1,\ R = \dfrac{5}{2} = 2,5.$