Model 1 test admitere AC - 2021 – soluţii

1. Trinomul

$$x^2 + 2ax + b, a, b \in \mathbb{R}$$

are rădăcinile strict negative dacă:

(a) $a \leq 0$ şi $a^2 \geq b$; (b) $a \geq 0$ şi $b \geq 0$;
(c) $0 < b \leq a^2$ şi $a > 0$; (d) $a \leq 0$ şi $b \leq a^2$.

Soluţie. Se impun condiţiile $\Delta = 4(a^2 - b) \geq 0, S = -2a < 0, P = b > 0$.

Răspuns corect: (c). □

2. Mulţimea S a tuturor soluţiilor sistemului

$$\begin{cases} xy + x + y = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$$

este:

(a) $S = \{(2,3), (3,2), (1,5), (5,1)\}$; (b) $S = \{(3,2), (1,5)\}$;
(c) $S = \{(1,5), (5,1)\}$; (d) $S = \{(2,3), (1,5)\}$.

Soluţie. Notăm $x + y = s$ şi $xy = p$. Se obţine $p + s = 11$ şi $ps = 30$, de unde $s = 5, p = 6$ sau $s = 6, p = 5$ etc.

Răspuns corect: (a). □

3. Mulţimea valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ care sunt soluţii ale inecuaţiei

$$\left| \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} \right| < 1$$

este:

(a) $(1,3)$; (b) $(-\infty, 1) \cup (1,3)$; (c) $\left(\frac{1}{7}, 3\right)$; (d) $\left(-\infty, \frac{1}{7}\right)$.

Soluţie. Inegalitatea este echivalentă cu $-1 < \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} < 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2 - x + 5}{(x-1)(x-3)} > 0 \\ \dfrac{7x - 1}{(x-1)(x-3)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \\ x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{7}\right) \cup (1,3). \end{cases}$$

Răspuns corect: (d). □

4. Relaţia dintre numerele:

$$a=\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}, b=\sqrt{1+\sqrt{2}}$$

este:

(a) numerele nu pot fi comparate; (b) $a=b$; (c) $a>b$; (d) $a<b$.

Soluţie. $a=\sqrt[6]{7+\sqrt{48}}<b=\sqrt[6]{7+\sqrt{50}}$.

Răspuns corect: (d). $\square$

5. Mulţimea tuturor valorilor lui $x\in\mathbb{R}$ pentru care $|x-1|,-1,|3x-5|$ sunt în progresie geometrică în această ordine este:

(a) $\emptyset$; (b) $\left\{\frac{2}{3},2\right\}$; ($c$) $\left\{\frac{2}{3},1\right\}$; ($d$) $\{0,2\}$.

Soluţie. Condiţia ca cele trei numere să fie în progresie geometrică este: $|x-1|\,|3x-5|=(-1)^2$. Se explicitează modulele, se rezolvă ecuaţiile obţinute şi se ţine seama de intervalele considerate.

Răspuns corect: (b). $\square$

6. Numărul de soluţii reale ale ecuaţiei

$$2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=6^x+6^{x+1}$$

este:

(a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) 3.

Soluţie. Ecuaţia se mai scrie $2^x+2\cdot 2^x+2^2\cdot 2^x=6^x+6\cdot 6^x$ sau $7\cdot 2^x=7\cdot 6^x$, adică $2^x\cdot(1-3^x)=0$. Cum $2^x\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că $3^x=1$, deci singura soluţie este $x=0$.

Răspuns corect: (b). $\square$

7. Mulţimea soluţiilor reale ale inecuaţiei

$$\log_{1-x}(x+1)\geq 2$$

este:

(a) $(-\infty,0)\cup(3,\infty)$; ($b$) $(0,3)$; (c) $\emptyset$; (d) $(-1,0)\cup(0,1)$.

Soluţie. Condiţiile de existenţă ale logaritmilor implică $x\in(-1,0)\cup(0,1)$.

i) Dacă $0<1-x<1\Rightarrow x\in(0,1)$; inecuaţia devine $x+1\leq(1-x)^2\Rightarrow x\in(-\infty,0)\cup(3,\infty)$-imposibil.

ii) Dacă $1<1-x\Rightarrow x\in(-1,0)$; inecuaţia devine $x+1\geq(1-x)^2\Rightarrow x\in(0,3)$-imposibil.

Răspuns corect: (c). $\square$

8. Numărul termenilor raţionali din dezvoltarea binomială:

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)^{90}$$

este:

(a) 15; (b) 14; (c) 17; (d) 16.

Soluţie. $T_{k+1}=C_{90}^{k}\left(\sqrt{3}\right)^{90-k}\left(\sqrt[3]{2}\right)^{k}=C_{90}^{k}3^{\frac{90-k}{2}}2^{\frac{k}{3}}$, de unde $k=6l$, $0\leq 6l\leq 90$, deci $l=\left[\frac{90}{6}\right]+1=16$.

Răspuns corect: (d). $\square$

9. Mulţimea valorilor lui $x\in\mathbb{R}$ pentru care este adevărată inegalitatea

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & x^2-6x+11 & x \\ 1 & x^2-4x+5 & x-2 \end{vmatrix}\leq 0$$

este:

(a) $[2,\infty)$; (b) $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$; (c) $(0,2)$; (d) $\mathbb{R}$.

Soluţie. Valoarea determinantului este: $-3x^2+15x-19$.

Răspuns corect: (d). $\square$

10. Valorile parametrului real α pentru care sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 2x+y-z=\alpha \\ x-y+2z=1 \\ 4x-y+3z=2+\alpha \end{cases}$$

este incompatibil sunt:

(a) $\alpha\in(-\infty,1]$; (b) $\alpha=1$; (c) $\alpha\in\mathbb{R}$; (d) nu există.

Soluţie. Determinantul sistemului este egal cu zero. Se caută un determinant principal diferit de zero, $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\neq 0$, iar determinantul caracteristic este egal cu zero independent de α.

Răspuns corect: (c). $\square$

11. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale se consideră legea de compoziţie $\star$ definită prin

$$x\star y=mx+ny-1,\forall x,y\in\mathbb{R},$$

în care m şi n sunt constante reale. Valorile parametrilor m şi n astfel încât $(M, \star)$ să fie grup comutativ sunt:

(a) $m = 1, n = 2$; (b) $m = 1, n = -1$; (c) nu există; (d) $m = 1, n = 1$.

Soluţie. Din proprietatea de comutativitate rezultă $m = n$. Din condiţia de asociativitate rezultă $m = 1$. Deci $x \star y = x + y - 1$. Se găseşte elementul neutru $e = 1$. Elementul invers $x \star x^* = 1 \Rightarrow x + x^* - 1 = 1 \Rightarrow x^* = 2 - x$.

Răspuns corect: (d). $\square$

12. Fie

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right).$$

Atunci:

(a) $l = 1$; (b) $l = \frac{1}{2}$; (c) $l = 0$; (d) $l = \infty$.

Soluţie. Utilizăm formula $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n\,(n+1)$.

Răspuns corect: (b). $\square$

13. Fie suma

$$S_n = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n.$$

Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{2021} S_n}{3^n}$ este:

(a) 1; (b) 0; (c) ∞; (d) 2.

Soluţie. Valoarea sumei (se derivează binomul lui Newton $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$ şi se ia $x = 1$) este

$$S_n = n2^{n-1}.$$

Rezultă limita egală cu 0.

Răspuns corect: (b). $\square$

14. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri de numere raţionale ce verifică relaţia

$$\left(3+\sqrt{7}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{7},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dacă $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ atunci:

(a) $l = 3$; (b) $l = 0$; (c) $l = \sqrt{3}$; (d) $l = \sqrt{7}$.

Soluţie. Utilizând dezvoltarea binomului lui Newton se observă că:

$$\left(3+\sqrt{7}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{7}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(3-\sqrt{7}\right)^n = x_n - y_n\sqrt{7}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Atunci $x_n = \frac{(3+\sqrt{7})^n + (3-\sqrt{7})^n}{2}$ şi $y_n = \frac{(3+\sqrt{7})^n - (3-\sqrt{7})^n}{2\sqrt{7}}$, de unde

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\sqrt{7}\left[(3+\sqrt{7})^n + (3-\sqrt{7})^n\right]}{(3+\sqrt{7})^n - (3-\sqrt{7})^n} = \sqrt{7}\cdot\frac{1+\left(\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}\right)^n}{1-\left(\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}\right)}.$$

Cum $\left|\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}\right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \sqrt{7}\cdot\frac{1+0}{1-0} = \sqrt{7}.$ □

15. Mulţimea punctelor de continuitate ale funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, unde

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x\in\mathbb{Q} \\ x^2, & \text{dacă } x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

este:

(a) $\{0,1\}$; (b) $[0,1]$; (c) $\mathbb{Q}$; (d) $\emptyset$.

Soluţie. Considerând şiruri de argumente raţionale respectiv iraţionale se constată că punctele de continuitate sunt doar cele unde $x^2 = x$.

Răspuns corect: (a). □

16. Fie

$$l = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x} - e^{\operatorname{tg} x}}{e^{\sin 2x} - e^{\operatorname{tg} 2x}}.$$

Atunci:

(a) $l=0$; (b) $l=\frac{1}{8}$; (c) $l=\frac{1}{2}$; (d) limita nu există.

Soluţie. Avem

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg} x}(e^{\sin x - \operatorname{tg} x} - 1)}{e^{\operatorname{tg} 2x}(e^{\sin 2x - \operatorname{tg} 2x} - 1)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg} x}}{e^{\operatorname{tg} 2x}}\frac{e^{\sin x - \operatorname{tg} x} - 1}{\sin x - \operatorname{tg} x}\frac{\sin 2x - \operatorname{tg} 2x}{e^{\sin 2x - \operatorname{tg} 2x} - 1}\frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{\sin 2x - \operatorname{tg} 2x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{\sin 2x - \operatorname{tg} 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}}{2\cos 2x - \frac{2}{\cos^2 2x}} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos^3 x - 1}{\cos^3 2x - 1} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Răspuns corect: (b) . □

17. Fie funcţia $f : [-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+1}$. Să se determine abscisa x_0 a punctului de pe graficul funcţiei f unde tangenta este paralelă cu dreapta care uneşte punctele de pe grafic de abscise 0 şi 3.

(a) $\frac{1}{3}$; (b) $\frac{1}{4}$; (c) $-\frac{5}{6}$; (d) $\frac{5}{4}$.

Soluţie. Punctele de abscise 0 şi 3 sunt $A(0,1)$ şi $B(3,2)$. Ecuaţia dreptei AB este:

$$y = \frac{x}{3} + 1.$$

Ecuaţia tangentei în $(x_0, f(x_0))$ este

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Pentru ca dreptele să fie paralele, trebuie ca

$$f'(x_0) = \frac{1}{3},$$

adică

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0+1}} = \frac{1}{3}.$$

Rezultă $x_0 = \dfrac{5}{4}$.

Răspuns corect: (d). $\square$

18. Fie

$$I = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Atunci:

(a) $I = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \dfrac{x}{2(x^2+1)} + \mathcal{C}$;

(b) $I = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \dfrac{x}{2(x^2+1)} + \mathcal{C}$;

(c) $I = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \mathcal{C}$;

(d) $I = \dfrac{x}{2(x^2+1)} + \mathcal{C}$.

Soluţie. Avem

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(x^2+1-x^2)\,dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{dx}{(x^2+1)} - \int x \frac{x dx}{(x^2+1)^2} \\ &= \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \int x \left(\frac{1}{x^2+1} \right)' dx \\ &= \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \left[\frac{x}{x^2+1} - \int \frac{1}{x^2+1} dx \right]. \end{aligned}$$

Răspuns corect: (a). $\square$

19. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, notăm $I_n = \int_0^1 x^{2021} \cdot e^{-n^2 x^2} dx$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} n^{2021} \cdot I_n$$

are valoarea:

(a) 2021; (b) $\frac{1}{2021}$; (c) 0; (d) ∞.

Soluţie. Avem

$$n^{2021} \cdot I_n = \int_0^1 (nx)^{2021} \cdot e^{-(nx)^2} dx.$$

Făcând schimbarea de variabilă $nx = y$, obţinem

$$n^{2021} \cdot I_n = \frac{\int_0^n y^{2021} \cdot e^{-y^2} dy}{n}.$$

Cum funcţia

$$F(t) = \int_0^t y^{2021} \cdot e^{-y^2} dy$$

este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi

$$F'(t) = t^{2021} \cdot e^{-t^2},$$

rezultă aplicând regula lui L'Hôpital mai sus că

$$\lim_{n\to\infty} n^{2021} \cdot I_n = \lim_{n\to\infty} n^{2021} \cdot e^{-n^2} = 0.$$

Răspuns corect: (c). $\square$

20. Coordonatele punctului comun dreptelor

$$2x - 3y - 5 = 0, 3x + 4y - 16 = 0, 4x - 23y + 7 = 0$$

sunt:

(a) $(4, -1)$; (b) $(4, 1)$; (c) $(1, -1)$; (d) $(2, 2)$.

Soluţie. Rezolvăm sistemul $\begin{cases} 2x - 3y - 5 = 0 \\ 3x + 4y - 16 = 0 \\ 4x - 23y + 7 = 0 \end{cases}$. Soluţia este: $[x = 4, y = 1]$.

Răspuns corect: (b). $\square$

21. Se consideră punctul A de coordonate $(4,2)$. Punctele situate pe axa Oy aflate la distanţa $d = 2\sqrt{5}$ faţă de A au coordonatele:

(a) $(-2\sqrt{5},0),(2\sqrt{5},0)$; (b) $(0,-2\sqrt{5}),(0,2\sqrt{5})$; (c) $(0,0),(0,4)$; (d) $(0,0),(8,0)$.

Soluţie. Observăm că $B(0,m)$, $AB = 2\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{16+(m-2)^2} = 2\sqrt{5} \Rightarrow m = 0, m = 4$.

Răspuns corect: (c). $\square$

22. Ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(2,7)$ şi formează cu axa Ox un unghi de $60°$ este:

(a) $y + x\sqrt{3} = 7$; (b) $y - 7 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}(x-2)$;

(c) $y + 7 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}(x+2)$; (d) $y - x\frac{1}{\sqrt{3}} = 7 - 2\sqrt{3}$.

Soluţie. Există două drepte care satisfac cerinţele problemei având pantele $m_1 = \mathrm{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ şi respectiv, $m_2 = \mathrm{tg}(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Deci ecuaţiile dreptelor sunt: $y - 7 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}(x-2)$.

Răspuns corect: (b). $\square$

23. Se dau vectorii $\overrightarrow{a} = -3\alpha\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{b} = \beta\overrightarrow{i} + \frac{3}{2}\overrightarrow{j}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Condiţia ca vectorii $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ să fie perpendiculari este:

(a) $\alpha = \beta = 0$; (b) $\frac{\alpha}{\beta} = -1$; (c) $\alpha\beta = 1$; (d) $\alpha + \beta = -1$.

Soluţie. Condiţia de perpendicularitate este ca produsul scalar $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$, adică $-3\alpha\beta + 3 = 0 \iff \alpha\beta - 1 = 0$.

Răspuns corect: (c). $\square$

24. Fie

$$\begin{aligned} \sin\theta + \cos\theta &= a \\ \sin^5\theta + \cos^5\theta &= b. \end{aligned}$$

Relaţia dintre a şi b este:

(a) $a(5-a^4) = 4b$; (b) $a(3-a^4) = 2b$;

(c) $a^4 - 3 = a^3 b$; (d) $a^5 + a^3 - 1 = b$.

Soluţie. Ridicând la pătrat prima relaţie se obţine

$\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}(a^2-1)$.

Apoi descompunem

$$\sin^5\theta + \cos^5\theta = (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^4\theta - \sin^3\theta\cos\theta + \sin^2\theta\cos^2\theta - \sin\theta\cos^3\theta + \cos^4\theta).$$

Folosind relaţia $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ se obţine $a(5-a^4) = 4b$.

Răspuns corect: (a). $\square$

25. Valoarea expresiei:

$$E = \sin 70^0 \cos 50^0 + \sin 260^0 \cos 280^0$$

este:

$(a)\ E=\dfrac{1}{2};\quad (b)\ E=\dfrac{\sqrt{3}}{2};\quad (c)\ E=\dfrac{\sqrt{3}}{4};\quad (d)\ E=1.$

Soluţie. Ţinem seama de egalităţile: $\sin 70^0=\cos 20^0$, $\sin 260^0=-\cos 10^0$, $\cos 280^0=\sin 10^0$, de unde rezultă

$$\begin{aligned} E &= \cos 20^0 \cos 50^0 - \cos 10^0 \sin 10^0 \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos 70^0+\cos 30^0-\sin 20^0\right)=\frac{1}{2}\cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Răspuns corect: (c). $\square$