

Subiecte (model 2) la testul grilă de Matematică

1. Numărul complex $z = i\sqrt{3} - 1$, unde i este unitatea imaginară, are conjugatul $\bar{z}$. Atunci $(\bar{z})^3$ aparține mulțimii:

(a) $\mathbb{N}$; (b) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; (c) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; (d) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

2. Fie parametrul $m \in \mathbb{R}$ și ecuația
 $mx^2 + (m+1)x + m - 1 = 0$.

Atunci condiția necesară și suficientă ca ecuația anterioară să nu admită rădăcini reale este:

(a) $m \in (3 - 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3})$; (b) $m \in \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$;
(c) $m \in \left[1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$; (d) $m \in \left(-\infty, 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.

3. Suma primilor 10 termeni ai unei progresii aritmetice ce are al doilea termen $a_2 = 5$ și al cincilea termen $a_5 = 14$ este:

(a) 155; (b) 126; (c) 145; (d) 150.

4. Dintre 6 elevi de clasa a XI -a și 4 elevi de clasa a XII -a se aleg 5 persoane pentru a forma o echipă de lot pentru un hackathon. În câte moduri se poate alcătui această echipă, știind că în componența ei trebuie să fie cel puțin 3 elevi de clasa a XII -a?

(a) 60; (b) 66; (c) 864; (d) 144.

5. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{-2x}$. Atunci:

(a) funcția derivată f' este monoton descrescătoare pe $\mathbb{R}$;

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(2021) + f''(2021) + \dots + f^{(n)}(2021)}{f^{(n)}(2021)} = \frac{-1}{3}$;

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(2) + f''(2) + \dots + f^{(n)}(2)}{f^{(n)}(2)} = \frac{2}{3}$;

(d) graficul funcției derivate f' are asimptotă verticală.

6. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{21 + |x - 21|}$. Atunci o primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcției f este:

(a) $F(x) = \begin{cases} 21 - \ln(2 \cdot 21 - x), & x \leq 21 \\ \ln x + 21, & x > 21 \end{cases}$; (b) $F(x) = \begin{cases} 2 - \ln(2 \cdot 21 - x), & x \leq 21 \\ \ln x, & x > 21 \end{cases}$;

(c) $F(x) = 21 + \ln|x|$; (d) $F(x) = \begin{cases} 21 + \ln(21 - x), & x < 21 \\ 21 & x = 21 \\ \ln x + 21, & x > 21 \end{cases}$.

7. Fie $\triangle ABC$ cu $BC = 8$ și $\cos A = \frac{4}{5}$. Diametrul cercului circumscris are valoarea:

(a) 10; (b) $\frac{40}{3}$; (c) 11; (d) 8.

8. Mulțimea M a tuturor soluțiilor ecuației $7^{2\sqrt{x-1}} - 10 \cdot 7^{\sqrt{x-1}} + 21 = 0$ este:

(a) $M = \{3, 7\}$; (b) $M = \{1, \log_7 3\}$; (c) $M = \{2, 1 + (\log_7 3)^2\}$; (d) $M = \{2\}$.

9. Fie $\vec{r}_A = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{r}_B = -\vec{i} - 3\vec{j}$ și $\vec{r}_C = 2\vec{i} + 7\vec{j}$ vectorii de poziție ai vârfurilor triunghiului ABC și $\vec{r}_G$ vectorul de poziție al centrului de greutate a triunghiului. Atunci cosinusul unghiului format de $\vec{r}_A$ și $\vec{r}_G$ este:

(a) $\frac{3}{\sqrt{10}}$; (b) $\frac{1}{\sqrt{10}}$; (c) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

10. Se dă funcția $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\arcsin \sqrt{x}}{1 - \ln(e-x)}$. Domeniul maximal de continuitate pentru f este:

(a) $\mathbb{D} = (0, e)$; (b) $\mathbb{D} = [0, 1]$; (c) $\mathbb{D} = (0, 1]$; (d) $\mathbb{D} = [0, e)$.

11. Derivata funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_{x^2}^{\sin x} e^{t^2} dt$ este:

(a) $f'(x) = e^{\sin^2 x} - e^{x^4}$; (b) f' nu există;
(c) $f'(x) = e^{\sin^2 x} \cdot \cos x - e^{x^4} \cdot 2x$; (d) $f'(x) = e^{\sin^2 x} \cdot \cos x - e^{x^2}$.

12. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -4x^2 - 3x + 1, & \text{dacă } x < 0 \\ e^x & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$:

(a) nu este monotonă pe $\mathbb{R}$; (b) este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$;
(c) este injectivă pe $\mathbb{R}$; (d) nu este surjectivă.

13. Fie $A = \{2020, 2021, 2022\}$ și $B = \{10, 20, 30, 40, 50\}$. Probabilitatea de a alege din mulțimea tuturor funcțiilor $f: A \rightarrow B$ o funcție injectivă este

(a) $\frac{12}{25}$; (b) $\frac{12}{15}$; (c) $\frac{24}{125}$; (d) $\frac{20}{81}$.

14. Fie $A = (a_{ij})_{i=\overline{1,3}, j=\overline{1,3}}$ și $B = (b_{ij})_{i=\overline{1,3}, j=\overline{1,3}}$ două matrice cu $a_{ij} = \min(i, j)$ și $b_{ij} = \max(i, j)$, $i = \overline{1, 3}, j = \overline{1, 3}$. Atunci:

(a) $\det(A - B) = -2$; (b) $\det(A + B) = 4$; (c) $\text{rang}(A - B) = 2$; (d) $\text{rang}(A + B) = 2$.

15. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 3$. Atunci:

(a) f admite puncte de extrem local, iar abscisele lor sunt 2 și 4;
(b) f admite puncte de extrem local, iar abscisele lor sunt 19 și 23;
(c) f este convexă pe $(-\infty, 2]$;
(d) f este crescătoare pe $[2, 4]$.

16. Fie parametrul $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{a} = -\vec{i} - \vec{j}$ și $\vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + m\vec{j}$ să fie perpendiculari. Atunci $E = m + \sin \frac{5\pi}{6} \cdot \cos \frac{7\pi}{4}$ este:

(a) $\frac{\sqrt{6} - 2\sqrt{2}}{4}$; (b) $\frac{-\sqrt{2}}{4}$; (c) 0; (d) $\frac{1 - 2\sqrt{2}}{4}$.

17. Se dă şirul

$$x_n = 1 + \frac{2020}{2021} + \left(\frac{2020}{2021}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2020}{2021}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- (a) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este şir descrescător; (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2021}$;
(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$; (d) $x_n < 2021, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

18. Fie $a > 1$ un parametru real dat. Mulţimea M a soluţiilor $x > 1$ ale inecuaţiei

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{8+\log_a x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_a^2 x}$$

este:

- (a) $M = (1, a^8)$; (b) $M = (1, 1 + a^{-4})$; (c) $M = (a^8, +\infty)$; (d) $M = \emptyset$.

19. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia

$$f : (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -1 + 2ax, & \text{dacă } x \in (-2, 1] \\ \frac{\sqrt{x^2 + 8} - 3}{x^2 - 3x + 2}, & \text{dacă } x \in (1, 2) \end{cases}$$

să fie continuă pe $(-2, 2)$.

- (a) $a = \frac{-2}{3}$; (b) $a = \frac{1}{3}$; (c) $a = \frac{-1}{3}$; (d) nu există a cu proprietatea cerută.

20. Fie $m \in \mathbb{R}$. Sistemul $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + my + z = 3 \\ x + my + mz = 3 \end{cases}$ este:

- (a) compatibil unic determinat, $\forall m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (b) incompatibil, pentru $m = 1$;
(c) compatibil nedeterminat, pentru $m = 2$; (d) incompatibil, pentru $m = 2$.

21. Fie $(d_1) : 2x + ay - 7 = 0$ acea dreaptă în plan pentru care $a \in \mathbb{R}$ se determină din condiţia ca punctul $A(2, 1)$ să aparţină dreptei. Fie (d_2) acea dreaptă în plan care trece prin punctele $B(0, 4)$ şi $C(6, 0)$. Atunci:

- (a) dreptele (d_1) şi (d_2) sunt perpendiculare;
(b) dreptele (d_1) şi (d_2) se intersectează în $M(1, \frac{7}{3})$;
(c) dreptele (d_1) şi (d_2) coincid;
(d) dreptele (d_1) şi (d_2) sunt paralele.

22. Fie $I_1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$ şi $I_2 = \int_2^3 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$. Atunci $I_1 + I_2$ este:

- (a) $\frac{2\pi}{9}\sqrt{3} - \ln\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\ln 3 - 2\sqrt{2}\ln 2 - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$; (b) $-\frac{2\pi}{9}\sqrt{3} + \ln 3 - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$;
(c) $\frac{2\pi}{9}\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ln 3 - 2\sqrt{2}\ln 2 - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$; (d) $\frac{2\pi}{9}\sqrt{3} + \frac{1-\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3}\ln 3 - 2\sqrt{2}\ln 2$.

23. Pe mulţimea $G = \mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie asociativă şi comutativă:

$$x * y = xy - x - y + 2, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Fie e elementul neutru al legii de compoziţie anterioare şi z soluţia ecuaţiei $z * 2022 = e$. Atunci:

- (a) $z = \frac{2022}{2021}$; (b) $z = \frac{1}{2022}$; (c) $z = \frac{2021}{2022}$; (d) $z = \frac{-2021}{2022}$.

24. Produsul

$$(\operatorname{tg} 1^{\circ} - \operatorname{ctg} 1^{\circ}) \cdot (\operatorname{tg} 2^{\circ} - \operatorname{ctg} 2^{\circ}) \cdot \dots \cdot (\operatorname{tg} 89^{\circ} - \operatorname{ctg} 89^{\circ})$$

este:

(a) 0; (b) $\frac{1}{2^{89}}$; (c) $\frac{-1}{2^{89}}$; (d) 1.

25. Fie $A(-2, -1), B(1, 2), C(0, 5)$ vârfurile unui triunghi. Să se ordoneze măsurile în grade ale unghiurilor triunghiului.

(a) $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) > m(\hat{C})$; (b) $m(\hat{A}) > m(\hat{C}) > m(\hat{B})$;
(c) $m(\hat{C}) < m(\hat{A}) < m(\hat{B})$; (d) $m(\hat{A}) < m(\hat{C}) < m(\hat{B})$.