Model 4 test admitere AC - 2021

1. Fie $m \in \mathbb{R}$. Rădăcinile ecuaţiei

$$mx^2 + 2(m+1)x + (m-2) = 0$$

au semne contrare dacă

(a) $m \in (0, \infty)$;

(b) $m \in \left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$;

(c) $m \in (0, 2)$;

(d) $m \in \left(-\frac{1}{4}, 2\right)$.

Soluţie. Impunem condiţiile $\Delta = 4(m+1)^2 - 4m(m-2) = 4(4m+1) > 0$ şi $P = x_1x_2 = \frac{m-2}{m} < 0$, unde x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei.

Răspuns corect: (c). □

2. Numărul soluţiilor sistemului

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases}$$

este:

(a) 8;

(b) 4;

(c) 2;

(d) 0.

Soluţie. Înmulţim prima ecuaţie cu 13 si adunăm ecuaţiile. Se obţine

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{y}\right) + 2 = 0,$$

unde am folosit şi faptul că $y \neq 0$ (altfel, din prima ecuaţie am obţine $x^2 = -1$). Notăm $t = \frac{x}{y}$ şi rezultă $t = 2$ sau $t = \frac{1}{2}$. Astfel, $x = 2y$ sau $y = 2x$. Înlocuind într-una din ecuaţiile iniţiale obţinem soluţiile $x_1 = 1, y_1 = 2$; $x_2 = -1, y_2 = -2$; $x_3 = 2, y_3 = 1$ şi $x_4 = -2, y_4 = -1$.

Răspuns corect: (b). $\square$

3. Mulţimea tuturor valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care are loc inegalitatea

$$\left|\frac{2x^2-1}{x^2-1}\right| < 1$$

este:

(a) $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \setminus \{0\}$;

(b) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$;

(c) $(-1, 1) \setminus \{0\}$;

(d) $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

Soluţie. Inegalitatea este echivalentă cu

$$-1 < \frac{2x^2-1}{x^2-1} < 1,$$

adică

$$\begin{cases} \frac{3x^2-2}{x^2-1} > 0 \\ \frac{x^2}{x^2-1} < 0 \end{cases},$$

de unde se obţine

$$\begin{cases} x \in (-\infty, -1) \cup \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup (1, \infty) \\ x \in (-1, 1) \setminus \{0\} \end{cases}.$$

Răspuns corect: (a). $\square$

4. Valorile lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care

$$\sqrt{3x-1} - \sqrt{3x+1} > -1$$

sunt:

(a) $\left(\frac{5}{12}, \infty\right)$;

(b) $\left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$;

(c) $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$;

(d) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Soluţie. Mai întâi, existenţa radicalilor impune $x > \frac{1}{3}$. Apoi avem

$$\sqrt{3x-1} + 1 > \sqrt{3x+1}$$

şi, ridicând la pătrat,

$$\sqrt{3x-1} > \frac{1}{2}.$$

Ridicând din nou la pătrat se obţine răspunsul.

Răspuns corect: (a). □

5. Mulţimea tuturor valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care $|x-1|$, -1, $|3x-5|$ sunt în progresie aritmetică în această ordine, este:

(a) $\emptyset$;

(b) $\{1, 2\}$;

(c) $\left\{\frac{2}{3}, 1\right\}$;

(d) $\left\{\frac{2}{3}, 2\right\}$.

Soluţie. Condiţia ca numerele să fie în progresie aritmetică este

$$|x-1| + |3x-5| = -2.$$

După explicitarea modulelor se obţin următoarele cazuri

$$\begin{aligned} x \in (-\infty, 1], &\quad -(x-1) - (3x-5) = -2 \Rightarrow x = 2 \notin (-\infty, 1]; \\ x \in \left(1, \frac{5}{3}\right], &\quad (x-1) - (3x-5) = -2 \Rightarrow x = 3 \notin \left(1, \frac{5}{3}\right]; \\ x \in \left(\frac{5}{3}, \infty\right), &\quad (x-1) + (3x-5) = -2 \Rightarrow x = 1 \notin \left(\frac{5}{3}, \infty\right). \end{aligned}$$

Răspuns corect: (a). □

6. Numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei

$$\sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x}} = x - 1$$

este:

(a) 0;

(b) 1;

(c) 2;

(d) 3.

Soluţie. Condiţiile de existenţă a radicalilor sunt

$$x-1\geq 0,\quad 0\leq x^4-x\leq 1.$$

Ridicând ecuaţia iniţială la pătrat, se obţine

$$4x^3-4x^2-x=0,$$

cu soluţiile $x_1=0$, $x_2=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$, $x_3=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Dintre acestea doar x_3 verifică condiţiile de existenţă.

Răspuns corect: (b). □

7. Media aritmetică a soluţiilor ecuaţiei

$$2^x-4^x=\sqrt{8^x-16^x}$$

este

(a) $\frac{1}{2}$;

(b) $-\frac{1}{2}$;

(c) 1;

(d) -1.

Soluţie. Împărţind ecuaţia prin 4^x, obţinem

$$2^{-x}-1=\sqrt{2^{-x}-1}.$$

Notăm $y=2^{-x}$ şi găsim soluţiile $y_1=1$ şi $y_2=2$, de unde $x_1=0$ şi $x_2=-1$.

Răspuns corect: (b). □

8. Valoarea numărului natural m pentru care al 10-lea termen al dezvoltării binomului $(5+m)^m$ este cel mai mare, este:

(a) 12;

(b) 14;

(c) 16;

(d) 8.

Soluţie. Avem $T_{10} = C_m^9 5^{m-9} m^9$. Impunând $T_{10} > C_m^{10} 5^{m-10} m^{10}$ şi $T_{10} > C_m^8 5^{m-8} m^8$ obţinem

$$\begin{cases} m^2 - 9m - 50 < 0 \\ m^2 - 8m - 45 > 0 \\ m \in \mathbb{N} \end{cases},$$

de unde $m = 12$.

Răspuns corect: (a). $\square$

9. Fie

$$P(x) = x^2 - x \log_a m + 3 \log_a m - 8,$$

unde $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$, $a > 1$. Valorile lui m pentru care $P(x) > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, sunt:

(a) $m > a(a+1)$;

(b) $m \in (\sqrt{a}, a)$;

(c) $m \in (a^4, a^8)$;

(d) $m \in (a, 2a)$.

Soluţie. Impunem

$$\Delta = (\log_a m)^2 - 4(3 \log_a m - 8) = (\log_a m)^2 - 12 \log_a m + 32 < 0.$$

Notăm $\log_a m = t$ şi avem $t^2 - 12t + 32 < 0$, de unde $t \in (4, 8)$ şi, prin urmare, $m \in (a^4, a^8)$.

Răspuns corect: (c). $\square$

10. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 + c^2 > 0.$$

Rangul lui A este

(a) 0;

(b) 1;

(c) 2;

(d) 3.

Soluţie. Determinantul lui A este egal cu zero, de unde rezultă că rangul este strict mai mic decât 3. Pe de altă parte, se vede cu uşurinţă că există minori de ordinul doi cu determinanţii egali cu a^2, b^2 şi respectiv c^2. Cum cele trei numere nu pot fi simultan egale cu zero, rangul este egal cu 2.

Răspuns corect: (c). □

11. Fie $M = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ şi operaţia $*$ definită prin

$$x * y = 2ax + by + xy, \quad \forall x, y \in M.$$

Valorile parametrilor reali a şi b astfel încât $(M, *)$ să fie grup comutativ şi elementul simetric x' al unui element arbitrar x, sunt:

(a) $a = \frac{1}{2}, b = 1, x' = -\frac{x}{x+1}$;

(b) $a = 1, b = 1, x' = \frac{x}{x+1}$;

(c) $a = \frac{1}{2}, b = 1, x' = \frac{x}{x+1}$;

(d) $a = \frac{1}{2}, b = 1, x' = \frac{1}{x+1}$.

Soluţie. Din proprietatea de comutativitate avem $2a = b$. Apoi, din condiţia de existenţă a elementului neutru, rezultă

$$x * e = x \Rightarrow (b + e - 1)x = -be, \quad \forall x \in M,$$

de unde

$$b + e - 1 = 0, \quad be = 0,$$

adică $b = 1$, $a = \frac{1}{2}$ şi $e = 0$, sau

$$b = 0, \quad e = 1,$$

adică $x * y = xy$, dar M nu este închisă la această operaţie. Din $x * x' = 0$ obţinem şi $x' = -\frac{x}{x+1}$.

Răspuns corect: (a). $\square$

12. Limita

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

este:

(a) 1;

(b) $\frac{1}{2}$;

(c) $\frac{3}{4}$;

(d) ∞.

Soluţie. Amplificând cu conjugatul, avem

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \infty.$$

Răspuns corect: (d). $\square$

13. Valoarea lui

$$a = \lim_{n\to\infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n),$$

unde $b_k = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$, este:

(a) ∞;

(b) 0;

(c) 1;

(d) $\frac{1}{2}$.

Soluţie. Descompunem termenii b_k în fracţii simple

$$b_k = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k^2} + \frac{C}{k+1} + \frac{D}{(k+1)^2}$$

şi, după efectuarea calculelor, obţinem

$$b_k = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Prin urmare $a = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$.

Răspuns corect: (c). $\square$

14. Valoarea limitei

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}$$

este:

(a) 1;

(b) $\frac{1}{5}$;

(c) -1;

(d) $\frac{1}{3}$.

Soluţie. Limita se poate scrie

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{\ln x^{10}(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}})} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x + \ln(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{10\ln x + \ln(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}})} = \frac{1}{5}$$

Răspuns corect: (b). $\square$

15. Fie funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât

$$f(x) = (x + 2)g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

g este derivabilă în 0 şi $g(0) = 2$, $g'(0) = -1$. Atunci valoarea lui $f'(0)$ este:

(a) -2;

(b) 2;

(c) -1;

(d) 0.

Soluţie. Avem

$$f'(x) = g(x) + (x + 2)g'(x)$$

şi astfel $f'(0) = 0$

Răspuns corect: (d). $\square$

16. Valorile constantelor reale a şi b pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin

$$f(x)=\begin{cases}2x^2+b, & x\le 2\\ 2ax^3+11a, & x>2,\end{cases}$$

este derivabilă pe $\mathbb{R}$ sunt:

(a) $a=0, \quad b=-8$;

(b) $a=\frac{1}{9}, \quad b=-5$;

(c) $a=\frac{2}{3}, \quad b=-2$;

(d) $a=\frac{1}{3}, \quad b=1$.

Soluţie. Din condiţia de continuitate în 2, avem $b=27a-8$, iar din cea de egalitate a derivatelor la stânga şi la dreapta în 2, rezultă $a=\frac{1}{3}$.

Răspuns corect: (d). □

17. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}$, definită prin

$$f(x)=\frac{x+m}{x+2}e^{-x}, \quad m\in\mathbb{R}.$$

Să se precizeze valorile lui m pentru care f poate avea două puncte de extrem.

(a) $m\in[2,6]$;

(b) $m\in(-\infty,\frac{2}{3}]$;

(c) $m\in(\frac{2}{3},6)$;

(d) $m\in(-\infty,2)\cup(6,\infty)$.

Soluţie. Calculăm derivata funcţiei f şi avem

$$f'(x)=\frac{-x^2-(m+2)x-3m+2}{(x+2)^2}e^{-x}.$$

Ecuaţia $f'(x)=0$ trebuie să aibă două rădăcini reale diferite de -2. Astfel $\Delta=(m-2)(m-6)>0$.

Răspuns corect: (d). □

18. Valoarea integralei

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{t^2(1-e^t)}{1+e^t} dt$$

este:

(a) 1;

(b) e;

(c) $\ln 2$;

(d) 0.

Soluţie. Considerăm funcţia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{t^2(1-e^t)}{1+e^t}$. Avem

$$f(-t) = \frac{(-t)^2(1-e^{-t})}{1+e^{-t}} = -\frac{t^2(1-e^t)}{1+e^t} = -f(t),$$

deci funcţia f este impară şi, prin urmare, $I = 0$.

Răspuns corect: (d). $\square$

19. Derivata funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_{x^2}^{\sin x} e^{t^2} dt$$

este:

(a) $f'^{\sin^2 x} - e^{x^4}$;

(b) f' nu există;

(c) $f'^{\sin^2 x} \cos x - 2xe^{x^4}$;

(d) $f'^{\sin^2 x} \cos x - e^{x^2}$.

Soluţie. Considerăm funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = e^{t^2}$. Deoarece g este continuă pe $\mathbb{R}$, admite primitive pe $\mathbb{R}$. Fie G una din aceste primitive. Atunci

$$f(x) = G(\sin x) - G(x^2),$$

de unde rezultă

$$f'(x) = G'(\sin x)\cos x - G'^2)2x = g(\sin x)\cos x - g(x^2)2x = e^{\sin^2 x}\cos x - 2xe^{x^4}.$$

Răspuns corect: (c). □

20. În ΔABC avem $|BC| = 2$, $|AB| = \sqrt{2}$ şi $|AC| = 1+\sqrt{3}$. Atunci măsura unghiului $\hat{A}$ este egală cu:

(a) $\frac{\pi}{2}$;

(b) $\frac{\pi}{3}$;

(c) $\frac{2\pi}{3}$;

(d) $\frac{\pi}{4}$.

Soluţie. Folosim teorema cosinusului (teorema lui Pitagora generalizată) şi obţinem

$$\cos\hat{A} = \frac{|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2}{2|AB||AC|} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Răspuns corect: (d). □

21. Ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(2,7)$ şi formează cu axa (Ox) un unghi de două ori mare decât unghiul format de dreapta $(d) : x - 2y = 1$ cu axa (Ox) este:

(a) $y - x\sqrt{3} = 7$;

(b) $y + 7 = \pm\frac{4}{3}(x-2)$;

(c) $y - 7 = \pm\frac{4}{3}(x-2)$;

(d) $y - \frac{1}{\sqrt{3}}x = 7 - 2\sqrt{3}$.

Soluţie. Panta dreptei (d) este $m = \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}$, unde θ este unghiul făcut de dreaptă cu (Ox). Deoarece măsura unghiului făcut de dreapta căutată cu (Ox) este egală cu 2θ, avem panta acestei drepte

$$m_1 = \operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{4}{3},$$

sau

$$m_2 = \mathrm{tg}(\pi - 2\theta) = -\frac{4}{3}.$$

Astfel, există două drepte care trec prin A şi fac un unghi de măsură 2θ cu (OX): $y-7 = \pm\frac{4}{3}(x-2)$.

Răspuns corect: (c). $\square$

22. În ΔABC avem $m(\hat{A}) = \frac{\pi}{4}$, $|AB| = 3$, şi $|AC| = 4$. Atunci aria ΔABC este egală cu:

(a) $\sqrt{2}$;

(b) $\frac{5}{2}$;

(c) $3\sqrt{2}$;

(d) 6.

Soluţie. Aria triunghiului este dată de formula

$$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|AB||AC| \sin \hat{A} = 3\sqrt{2}$$

Răspuns corect: (c). $\square$

23. Fie numerele complexe z cu $|z| = 1$, care satisfac relaţia

$$\sin(z + \bar{z}) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + i(z - \bar{z})\right) = 0.$$

Atunci $\mathrm{Re}^4 z + \mathrm{Im}^4 z$ este un element al mulţimii:

(a) $\mathbb{N}$;

(b) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$;

(c) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$;

(d) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Soluţie. Considerăm $z = a + ib$. Relaţia din enunţ devine

$$\sin(2a) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2b\right) = 0,$$

adică $\sin(2a) = \sin(2b)$, deci $a = b + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Cum $|z|^2 = a^2 + b^2 = 1$, rezultă că $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sau $a = b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Astfel $a^4 + b^4 = \frac{1}{2}$.

Răspuns corect: (c). $\square$

24. Se dau vectorii $\bar{a} = -3\alpha\bar{i} + 2\bar{j}$ şi $\bar{b} = \beta\bar{i} + 3\bar{j}$. Condiţia ca vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{j}$ să fie coliniari este:

(a) $\alpha = \beta = 0$;

(b) $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{9}{2}$;

(c) $9\alpha + 2\beta = 0$;

(d) $\alpha + \beta = 1$.

Soluţie. Condiţia ca vectorii să fie coliniari este să aibă coordonatele proporţionale, adică

$$\frac{-3\alpha}{\beta} = \frac{2}{3}.$$

Răspuns corect: (c). $\square$

25. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei

$$\frac{\sin^2 x}{(1 + \operatorname{tg} x)\cos x} - \frac{\cos^2 x}{(1 + \operatorname{ctg} x)\sin x} = \sqrt{2}$$

este:

(a) $\left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

(b) $\left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

(c) $\emptyset$;

(d) $\left\{\pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Soluţie. Condiţiile de existenţă sunt $\operatorname{tg} x \neq -1$, $\operatorname{ctg} x \neq -1$, $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$. Apoi, ecuaţia se poate scrie $\sin x - \cos x = 1$, adică $\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -1$. Prin urmare $x \in \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Dar pentru aceste valori $\operatorname{tg} x = -1$

Răspuns corect: (c). $\square$