Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iaşi
Facultatea de Automatică şi Calculatoare
Admitere – sesiunea 2021
Domeniile: Calculatoare şi Tehnologia Informaţiei
Ingineria sistemelor (Automatică şi informatică aplicată)

Subiecte (model 5) la testul grilă de Matematică

1. Numărul soluţiilor ecuaţiei
$\sqrt{x-3}+2\sqrt{6+x-x^2}=\sqrt{x+13}-4$
este:
(a) 0; **(b)** 1; **(c)** 2; **(d)** 3.
Rezolvare. C.E.: $\begin{cases} x-3\geq 0 \\ 6+x-x^2\geq 0 \\ x+13\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[3,\infty) \\ x\in[-2,3] \\ x\in[-13,\infty) \end{cases} \Leftrightarrow D_E=\{3\}$
Se observă că singurul număr din domeniul de existenţă, 3, verifică ecuaţia, deci este singura soluţie.
Răspuns corect (b).

2. Fie x_1 şi x_2 rădăcinile ecuaţiei $x^2+2x+11=0$. Valoarea expresiei $E=(x_1)^3x_2+x_1(x_2)^3$ este
(a) $E=-198$; **(b)** $E=-18$; **(c)** $E=11$; **(d)** $E=-198$.
Rezolvare. Conform relaţiilor Viète$\Rightarrow$
$\begin{cases} x_1+x_2=-2 \\ x_1x_2=11 \end{cases} \Rightarrow$
$E=x_1x_2\left(x_1^2+x_2^2\right)=x_1x_2\left((x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right)=11\left((-2)^2-2\cdot 11\right)=-198.$
Răspuns corect (d).

3. Să se determine numerele reale x,y,z ştiind că x,y,z sunt în progresie aritmetică cu raţia nenulă, x,z,y sunt în progresie geometrică şi $x+y+z=18$.
(a) $24,6,-12$; **(b)** $6,6,6$; **(c)** $-6,2,10$; **(d)** $-12,6,24$.
Rezolvare. Din ipoteze$\Rightarrow$
$\begin{cases} 2y=x+z \\ z^2=xy \\ x+y+z=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=6 \\ x+z=12 \\ z^2=6x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=6 \\ z=12-x \\ x^2-30x+144=0 \end{cases} \Rightarrow$
$\begin{cases} x=6 \\ y=6 \\ z=6 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x=-12 \\ y=6 \\ z=24 \end{cases}$
Răspuns corect (d).

4. Numărul h al termenilor independenţi de x din dezvoltarea binomului $\left(\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{2}{\sqrt[4]{x}}\right)^{10}$ este:
(a) $h=0$; **(b)** $h=1$; **(c)** $h=2$; **(d)** $h=11$.
Rezolvare. $\left(\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{2}{\sqrt[4]{x}}\right)^{10}=\displaystyle\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{10-k}\left(\frac{2}{\sqrt[4]{x}}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}x^{\frac{2(10-k)}{3}}\cdot 2^k\cdot x^{\frac{-k}{4}}.$

Termenii independenţi de k au k astfel încât puterea lui x să fie $0 \Rightarrow$
$\frac{2(10-k)}{3}+\frac{-k}{4}=0 \Rightarrow k=\frac{80}{11} \notin \{0,1,...,10\}$
Răspuns corect (a).

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\sqrt[16]{2}\cdot...\cdot\sqrt[2^n]{2}\right)$ este:
(a) 1; **(b)** ∞; **(c)** 2; **(d)** 4.

Rezolvare. $a_n=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2^2}}\cdot 2^{\frac{1}{2^3}}\cdot 2^{\frac{1}{2^4}}\cdot...\cdot 2^{\frac{1}{2^n}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}}=2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1}}$.
$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{0-1}{\frac{1}{2}-1}}=2.$
Răspuns corect: (c).

6. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-\ln\left(1+x^2\right)$ şi F o primitivă a funcţiei f cu $F(0)=0$. Atunci $F(1)$ este:
(a) $-\frac{1}{2}$; **(b)** $\frac{5}{2}-\ln 2-\frac{\pi}{2}$; **(c)** $\frac{5}{2}-\ln 2-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$; **(d)** $5-\ln 2-\frac{\pi}{4}$.
Rezolvare. Se determină toate primitivele lui f :

$$\int\left(x-\ln\left(1+x^2\right)\right)dx=\frac{x^2}{2}-\int\left(\ln\left(1+x^2\right)\right)\cdot x'dx=\frac{x^2}{2}-\left(x\ln\left(1+x^2\right)-\int\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x\cdot xdx\right)=$$
$$=\frac{x^2}{2}-x\ln\left(1+x^2\right)+2\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}-x\ln\left(1+x^2\right)+2\left(\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx\right)=$$
$$=\frac{x^2}{2}-x\ln\left(1+x^2\right)+2x-2\operatorname{arctg}x+c, \forall x\in\mathbb{R}, \forall c\in\mathbb{R}.$$

$F(0)=0\Rightarrow c=0$
Atunci
$F(x)=\frac{x^2}{2}-x\ln\left(1+x^2\right)+2x-2\operatorname{arctg}x+0, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$
$F(1)=\frac{1^2}{2}-1\cdot\ln\left(1+1^2\right)+2\cdot 1-2\operatorname{arctg}1+0=\frac{5}{2}-\ln 2-\frac{\pi}{2}.$
Răspuns corect: (b).

7. Fie punctele din plan $A(1,2)$ şi $B(3,4)$. Fie C simetricul lui A faţă de B. Ecuaţia dreptei ce trece prin C şi este perpendiculară pe AB este:
(a) $(d): -x+y-1=0$; **(b)** $(d): x+y+1=0$;
(c) $(d): 2x+y-6=0$; **(d)** $(d): x+y-11=0$.
Rezolvare. C simetricul lui A faţă de $B\Rightarrow B$ este mijlocul segmentului $[AC]\Rightarrow$

$$\begin{cases} 3=\dfrac{1+x_C}{2} \\ 4=\dfrac{2+y_C}{2} \end{cases}\Rightarrow C(5,6).$$

Dreapta care trece prin A şi B are panta $m_{AB}=\frac{4-2}{3-1}=1\Rightarrow$
Perendiculara pe AB are panta $m_d=-1$.
Dreapta din enunţ are ecuaţia:
$(d): y-6=-1(x-5)\Leftrightarrow$
$(d): x+y-11=0$
Răspuns corect (d).

8. Mulţimea M a tuturor soluţiilor x ale inecuaţiei
$3 \cdot 4^x - 6^x > 2 \cdot 9^x$
este:
(a) $M = \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$; **(b)** $M = (0,1)$; **(c)** $M = (-\infty, 0)$; **(d)** $M = \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.
Rezolvare. Se observă că $2^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Atunci:
$3 \cdot 2^{2x} - 2^x \cdot 3^x > 2 \cdot 3^{2x} \big| : 2^{2x} \Rightarrow$
$3 - \left(\frac{3}{2}\right)^x > 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} \Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 3 < 0.$
Se notează $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t > 0.$
Atunci $2t^2 + t - 3 < 0 \Leftrightarrow t \in \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$. Se obţine $t \in \left(-\frac{3}{2}, 1\right) \cap (0, \infty) = (0, 1)$.
Se revine la subtituţie
$0 < \left(\frac{3}{2}\right)^x < 1 \overset{f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x \text{ cu baza } \frac{3}{2}>1 \text{ este strict crescătoare}}{\Rightarrow} x < 0.$
Răspuns corect (c).

9. Mulţimea tuturor $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii
$\overrightarrow{a} = (m+1)\overrightarrow{i} + 3m\overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{b} = (m-1)\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j}$
să aibă aceeaşi lungime şi să fie perpendiculari este
(a) $\left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$; **(b)** $\emptyset$; **(c)** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$; **(d)** $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.
Rezolvare. $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ sunt perpendiculari$\Rightarrow$
$(m+1) \cdot (m-1) + 3m \cdot m = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$ sau $m = -\frac{1}{2}$.
$\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ au aceeaşi lungime$\Rightarrow$
$\sqrt{(m+1)^2 + (3m)^2} = \sqrt{(m-1)^2 + m^2} \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 + 9m^2 = m^2 - 2m + 1 + m^2 \Leftrightarrow$
$8m^2 + 4m = 0 \Rightarrow m = 0$ sau $m = -\frac{1}{2}$.
Răspuns corect (d).

10. Să se determine $a \in \mathbb{R}^*$ astfel încât funcţia
$$f : (0, \pi) \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{-4x+3}, & \text{dacă } x \in (0,1] \\ a\dfrac{\sin(x-1)}{x^2 - 4x + 3}, & \text{dacă } x \in (1, \pi) \end{cases}$$
să fie continuă pe $(0, \pi)$.
(a) $a = -3e^3$; **(b)** $a = -\dfrac{2}{e}$; **(c)** $a = e^{-1}$; **(d)** nu există a cu proprietatea cerută.
Rezolvare. Pe intervalele $(0,1)$ şi $(1, \pi)$, f este funcţie continuă.
$f(1) = e^{-1}$;
$l_s(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \left(e^{-4x+3}\right) = e^{-1}$;
$$l_d(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \left(a\frac{\sin(x-1)}{x^2 - 4x + 3}\right) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \left(a\frac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x-3}\right) = a \cdot 1 \cdot \frac{1}{-2}.$$
f continuă în $1 \Rightarrow e^{-1} = a \cdot \dfrac{1}{-2} \Rightarrow a = -2 \cdot e^{-1}$.
Răspuns corect (b).

11. Fie funcţia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^3 e^{x^2}, & \text{dacă } x \in [-1, 0) \\ x^2 e^{x^3}, & \text{dacă } x \in [0, 1] \end{cases}$ şi $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.
Atunci:
(a) $I = \frac{1}{3}e - \frac{5}{6}$; **(b)** $I = e - 2$; **(c)** $I = \frac{2}{3}e - \frac{7}{6}$; **(d)** $I = \frac{4}{3}e - \frac{9}{6}$;.

Rezolvare. $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^3 e^{x^2} dx + \int_{0}^{1} x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} x^2 \left(e^{x^2}\right)' dx + \frac{1}{3}\int_{0}^{1} \left(e^{x^3}\right)' dx =$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 e^{x^2} \Big|_{x=-1}^{x=0} - \int_{-1}^{0} 2x e^{x^2} dx \right) + \frac{1}{3}\, e^{x^3}\Big|_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}e - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}e - \frac{5}{6}.$$

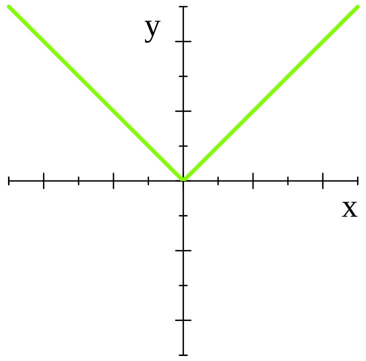
Răspuns corect (a).

12. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{dacă } x \leq 2 \\ -\frac{1}{4}x^2 + x, & \text{dacă } x > 2. \end{cases}$

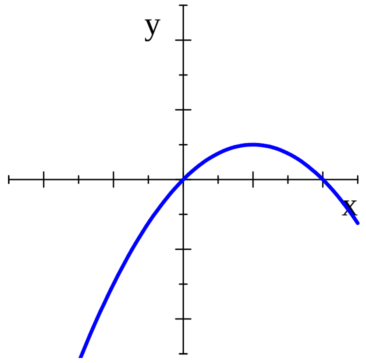
Atunci:

(a) f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$; **(b)** f este injectivă pe $\mathbb{R}$;
(c) f este surjectivă pe $\mathbb{R}$; **(d)** f este impară pe $[-1, 1]$.

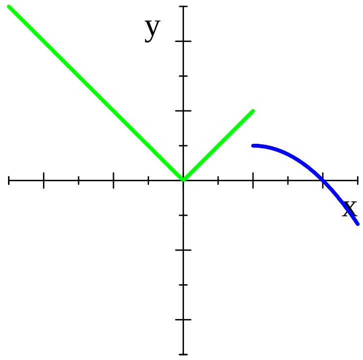
Rezolvare. Se reprezintă graficul pentru
$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = |x|$



Se reprezintă graficul pentru
$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_2(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x$



Se reprezintă $G_f = G_{f_1|_{(-\infty,2]}} \cup G_{f_2|_{(2,\infty)}}$:



Din grafic rezultă că:

-f este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$, crescătoare pe $[0, 2]$, descrescătoare pe $(2, \infty)$.

-f nu este injectivă pe $\mathbb{R}$, deoarece există o dreaptă $y = 0$ paralelă cu Ox, chiar Ox, care intersectează reprezentarea graficului în 2 puncte :$(0,0), (4,0)$,

-f este surjectivă pe $\mathbb{R}$, deoarece orice dreaptă $y = a, a \in \mathbb{R}$ paralelă cu Ox intersectează reprezentarea graficului în cel puţin un punct.

- f este pară pe $[-1, 1]$, deoarece $f(-x) = f(x), \forall x \in [-1, 1]$

Răspuns corect (c).

13. Fie $A = \{21, 22, 23\}$ şi $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Probabilitatea de a alege din mulţimea tuturor funcţiilor $f : A \to B$ o funcţie injectivă este:

(a) $\frac{12}{25}$; **(b)** $\frac{4}{25}$; **(c)** $\frac{24}{125}$; **(d)** $\frac{5}{12}$.

Rezolvare. Se determină numărul evenimentelor posibile, adică numărul tuturor funcţiilor $f : A \to B$, având $cardA = 3, cardB = 5$:

$(cardB)^{cardA} = 5^3 = 125$.

Se determină numărul evenimentelor favorabile producerii evenimentului de a alege o funcţie injectivă dintre cele 125 :

$A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 60$.

Atunci $P(A) = \frac{60}{125} = \frac{12}{25}$.

Răspuns corect (a).

14. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2000 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Atunci $\det\left(A + A^2 + ...A^{2021}\right)$ este:

(a) 2021^2; **(b)** 2021; **(c)** $1000 \cdot 2021 \cdot 2022$; **(d)** 2000.

Rezolvare. Se observă că:

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2000 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2000 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 \cdot 2000 & 1 \end{pmatrix}$;

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 \cdot 2000 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2000 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 \cdot 2000 & 1 \end{pmatrix}$;

...

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n-1) \cdot 2000 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2000 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n \cdot 2000 & 1 \end{pmatrix}$.

Atunci:
$A + A^2 + ...A^{2021} =$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 \cdot 2000 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 \cdot 2000 & 1 \end{pmatrix} + ... + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2021 \cdot 2000 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2021 & 0 \\ \frac{2021 \cdot 2022}{2} \cdot 2000 & 2021 \end{pmatrix}$$
$\det A = \det A^2 = ... = \det A^{2021} = 1.$
$\det A = 2021^2.$
Răspuns corect (a).

15. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x\left(x^2+1\right), & \text{dacă } x \le 0 \\ \operatorname{arctg} x, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$. Atunci:
(a) f nu este derivabilă pe $\mathbb{R}$; **(b)** $f'(0) = 1$;
(c) $f'(0) = 0$; **(d)** f nu are asimptotă orizontală la $+\infty$.
Rezolvare. $\exists f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f'(x) = \begin{cases} 3x^2+1, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \\ \dfrac{1}{1+x^2}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$
∞ este punct de acumulare pentru $\mathbb{R}$ şi $\exists \lim\limits_{x\to\infty} (\operatorname{arctg} x) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$ este asimptotă orizontală la $+\infty$.
Răspuns corect (b).

16. Fie $x \in \mathbb{R}$. Atunci $E = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos^2(x+\pi)$ are valoarea:
(a) 0; **(b)** 1; **(c)** $2\cos^2 x$; **(d)** $2\sin^2 x$.
Rezolvare. $E = \left(\cos x \cos \frac{\pi}{2} - \sin x \sin \frac{\pi}{2}\right)^2 + (\cos x \cos \pi - \sin x \sin \pi)^2 =$
$= \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$
Răspuns corect (b).

17. Numărul complex $z = i - \sqrt{3}$, unde i este unitatea imaginară, are conjugatul $\overline{z}$. Atunci $(\overline{z})^3$ aparţine mulţimii:
(a) $\mathbb{N}$; **(b)** $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; **(c)** $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; **(d)** $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.
Rezolvare. $(\overline{z})^3 = \left(-\sqrt{3} - i\right)^3 = -\left(\sqrt{3}+i\right)^3 =$
$= -\left(C_3^0\left(\sqrt{3}\right)^3 + C_3^1\left(\sqrt{3}\right)^2 i + C_3^2\left(\sqrt{3}\right) i^2 + C_3^3 i^3\right) = -\left(3\sqrt{3} + 3 \cdot 3i - 3\sqrt{3} - i\right)$
$(\overline{z})^3 = -8i \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}.$
Răspuns corect (d).

18. Fie sistemul $\begin{cases} 2x + y + z = 2021 \\ \quad -ay + z = -1 \\ a^2x + \quad z = 5 \end{cases}$ şi
$M = \{a \in \mathbb{R}; \text{sistemul este compatibil nedeterminat}\}$. Atunci:
(a) $M = \mathbb{R}\setminus\{-2, 0, 1\}$; **(b)** $M = \{-2, 0, 1\}$; **(c)** $M = \mathbb{R}\setminus\{0\}$; **(d)** $M = \{-2, 1\}$.
Rezolvare. Sistemul are $m = 3$ ecuaţii liniare cu $n = 3$ necunoscute.
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -a & 1 \\ a^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^3 + a^2 - 2a.$$
$a^3 + a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow a(a+2)(a-1) = 0.$

Pentru $a \in \mathbb{R} \backslash \{-2, 0, 1\} \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow m = n = rangA \Rightarrow$
$\Rightarrow$ sistemul este compatibil unic determinat.

Pentru $a = -2 \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 2021 \\ \quad\quad 2y + z = -1 \\ 4x + \quad\quad z = 5 \end{cases}$. Deoarece$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow rangA = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ sistemul este compatibil $n - rangA = 3 - 2 = 1$ nedeteterminat.

Pentru $a = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 2021 \\ \quad\quad\quad z = -1 \\ \quad\quad\quad z = 5 \end{cases} \Rightarrow$ sistemul este incompatibil.

Pentru $a = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 2021 \\ \quad -y + z = -1 \\ x + \quad\quad z = 5 \end{cases} \Rightarrow$ Deoarece$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow rangA = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ sistemul este compatibil $n - rangA = 3 - 2 = 1$ nedeteterminat.
Răspuns corect (d).

19. Fie
$f : [1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1};$
$a_n = \dfrac{1}{f(1)} + \dfrac{1}{f(2)} + \dfrac{1}{f(3)} + ... + \dfrac{1}{f(n)}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$
Atunci:
(a) şirul este strict descrescător; **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$;
(c) $a_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$; **(d)** şirul este mărginit.
Rezolvare. $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{f(n+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$
$\Rightarrow$ şirul este strict crescător.

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(k+1) - k} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} =$$
$$= \sqrt{n+1} - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$a_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty.$
Răspuns corect: (b).

20. Pe mulţimea $G = (-1, +\infty)$ se defineşte legea de compoziţie
$x * y = xy + x + y, \forall x, y \in (-1, +\infty)$.
Fie M o mulţime căreia îi aparţine elementul neutru e al legii de compoziţie anterioare şi z soluţia ecuaţiei $z * 2000 = e$. Atunci:
(a) $M = (-1, 1)$ şi $z = -\dfrac{2000}{2001}$; **(b)** $M = (0, 1)$ şi $z = -2000$;
(c) $M = (0, 2000)$ şi $z = -1$; **(d)** $M = (-1, 0)$ şi $z = \frac{-1}{2000}$.
Rezolvare.$x * e = x \Rightarrow xe + x + e = x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$(x + 1) e = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e = 0.$
$z * 2000 = e \Rightarrow 2000z + z + 2000 = 0 \Rightarrow z = -\dfrac{2000}{2001}.$
Răspuns corect (a).

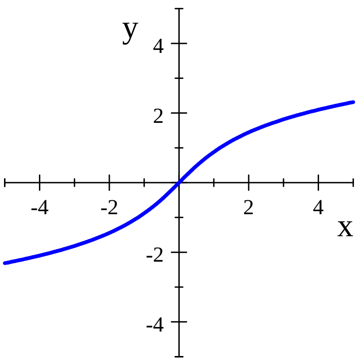
21. Fie $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), y \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos x = \frac{4}{5}$ şi $\cos y = \frac{-1}{3}$. Atunci $\sin(2x + y)$ are valoarea:

(a) $\frac{24+14\sqrt{2}}{75}$; **(b)** $\frac{24-14\sqrt{2}}{75}$; **(c)** $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$; **(d)** 1.
Rezolvare. $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \cos x > 0, \sin x < 0.$
$y \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x < 0, \sin x < 0.$
$\sin x = -\sqrt{1-\cos^2 x} = \frac{-3}{5}; \sin y = -\sqrt{1-\cos^2 y} = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$ şi
$\sin 2x = 2\sin x \cos x = \frac{-24}{25}.$
Atunci
$\sin(2x+y) = \sin 2x \cos y + \sin y \cos 2x = \frac{24-14\sqrt{2}}{75}.$
Răspuns corect (b).

22. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$. Atunci:
(a) f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \forall x \in \mathbb{R}$;
(b) f este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$;
(c) f este convexă pe $[0, \infty)$;
(d) f este funcţie impară pe $\mathbb{R}$.
Rezolvare. Se observă că f este derivabilă de două ori pe $\mathbb{R}$, cu
$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$
$$f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f''(x) = \left(\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot 2x = \frac{-x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}.$$
Se studiază tabelul de variaţie a funcţiei. Se precizează în tabel şi semnul lui f''.

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$	$+$	$+++$	$+$	$+++$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+++$	0	$---$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow\nearrow\nearrow$ convexă	21	$\nearrow\nearrow\nearrow$ concavă	∞

Se observă că f este crescătoare pe $\mathbb{R}$, convexă pe $(-\infty, 0]$ şi concavă pe $[0, \infty)$.
Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ este



Mai mult, $\forall x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ $-$interval simetric,
$$f(-x) = \ln\left(-x + \sqrt{(-x)^2+1}\right) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \ln\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \ln\left(\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{-1}\right)$$
$$= -\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = -f(x).$$
Deci f este funcţie impară. Imparitatea se observă şi din simetria reprezentării graficului lui f faţă de O.
Răspuns corect (d).

23. tg $\frac{5\pi}{6}$ este:

(a) $\sqrt{3}$; **(b)** $-\sqrt{3}$; **(c)** $\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$; **(d)** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Rezolvare. $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6} = \dfrac{\sin\frac{5\pi}{6}}{\cos\frac{5\pi}{6}} = \dfrac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{6}}{-\cos\frac{\pi}{6}} = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$.

Răspuns corect (c).

24. Fie $f : \left(\frac{-1}{2}, \infty\right) \to \mathbb{R}$ funcţia derivabilă cu valori nenule ce verifică
$\begin{cases} f^3(x) + f'(x) = 0, \forall x \in \left(\frac{-1}{2}, \infty\right) \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

Atunci:

(a) $f(1010) = \dfrac{1}{\sqrt{2021}}$; **(b)** $f(1010) = \dfrac{-1}{\sqrt{2021}}$;

(c) $f(1010) = \sqrt[4]{\dfrac{3}{2020}}$; **(d)** $f(1010) = -\sqrt[4]{\dfrac{3}{2020}}$.

Rezolvare. Pentru $x \in \left(\frac{-1}{2}, \infty\right)$,

$f^3(x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-f'(x)}{f^3(x)} = 1 \Big| \displaystyle\int (\ )\, dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \frac{-f'(x)}{f^3(x)} dx = \int 1 dx \Rightarrow \frac{1}{2f^2(x)} = x + c, \forall c \in \mathbb{R}.$$

$f(0) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$ şi $f(x) = +\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$.

Răspuns corect (a).

25. Vârfurile triunghiului ABC au coordonatele $A(-1,2), B(-2,a), C(b,-1)$, cu $a, b \in \mathbb{R}$. Să se determine perimetrul triunghiului ABC, ştiind că centrul său de greutate este $G(0,1)$.

(a) $P = \sqrt{10} + 5 + \sqrt{34}$; **(b)** $P = 6 + \sqrt{34}$;

(c) $P = 6 + \sqrt{10}$; **(d)** $P = 2 + 2\sqrt{5}$.

Rezolvare. $\begin{cases} \frac{1}{3}(-1-2+b) = 0 \\ \frac{1}{3}(2+a-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3+b = 0 \\ 1+a = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$

Atunci $A(-1,2), B(-2,2), C(3,-1)$ şi

$AB = \sqrt{(-2-(-1))^2 + (2-2)^2}. = 1.$

$BC = \sqrt{(3-(-2))^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{34}.$

$CA = \sqrt{(-1-3)^2 + (2-(-1))^2} = 5$

Răspuns corect (b).