Model 6 test admitere AC - 2021

1. Valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care inegalitatea

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + m > 0$$

este adevărată pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ sunt:

(a) $m \in (-\infty, 0)$;

(b) $m \in (0, 4)$;

(c) $m \in (8, \infty)$;

(d) $m \in (4, \infty)$.

Soluţie. Privim inecuaţia ca fiind o inecuaţie în x şi impunem

$$\Delta = -y^2 + 4y - m + 4 < 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Răspuns corect: (c). □

2. Valorile reale ale lui λ pentru care

$$\lambda x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda + 2 > 0, \quad \forall x \in [0, 3]$$

sunt:

(a) $\lambda > 0$;

(b) $-2 < \lambda \leq 0$;

(c) $\lambda \geq 0$;

(d) $\lambda \geq -2$.

Soluţie. Pentru $\lambda = 0$ inegalitatea este verificată pentru $x \in [0, 3]$. Dacă $\lambda \neq 0$, privim termenul din stânga al inegalităţii ca fiind ˆin variabila x cu discriminantul $\Delta = 4(-4\lambda + 1)$. Astfel, avem următoarele cazuri: $\lambda > 0$ şi ecuaţia asociată nu are rădăcini reale; $\lambda > 0$ şi ecuaţia are ambele rădăcini negative; $\lambda > 0$ şi ecuaţia are ambele rădăcini mai mari ca 3; $\lambda < 0$ şi ecuaţia are o rădăcină negativă şi cealaltă mai mare decˆat 3.

Răspuns corect: (d). $\square$

3. Mulţimea soluţiilor inecuaţiei

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3$$

este:

(a) $\mathbb{R}$;

(b) $\left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right]$;

(c) $\left(0, \frac{6}{13}\right)$;

(d) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

Soluţie. Impunem condiţiile $x \neq 0$, $1-4x^2 \geq 0$ şi obţinem $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right]$. Apoi, dacă $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$, fracţia este negativă, iar pentru $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, inecuaţia devine $1-3x < \sqrt{1-4x^2}$. Pentru $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ inecuaţia e verificată, pentru că $1-3x \leq 0$, iar pentru $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, avem $13x^2 - 6x < 0$, de unde $x \in \left(0, \frac{6}{13}\right)$. Prin urmare $x \in \left(0, \frac{6}{13}\right) \cap \left(0, \frac{1}{3}\right)$.

Răspuns corect: (b). $\square$

4. Numărul

$$a = \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}$$

aparţine mulţimii

(a) $\mathbb{N}$;

(b) $\mathbb{Z}$;

(c) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

(d) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Soluţie. Se calculează

$$a^3 = -20 - 6a \Leftrightarrow (a+2)(a^2 - 2a + 10) = 0,$$

de unde se obţine $a = -2$.

Răspuns corect: (b). $\square$

5. Mulţimea tuturor valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x + m, & x \leq 1 \\ 2mx - 1, & x > 1 \end{cases}$$

este surjectivă pe $\mathbb{R}$, este:

(a) $(-2, 0)$;

(b) $(0, 2]$;

(c) $(0, \infty)$;

(d) $(-\infty, 0)$.

Soluţie. Se observă că funcţia f este continuă pe $(-\infty, 1]$, deci imaginea acestui interval prin f este intervalul $(-\infty, 1+m]$. De asemenea, f este continuă pe $(1, \infty)$, deci imaginea acestui interval prin f este $(-\infty, 2m-1)$ dacă $m < 0$, $(2m-1, \infty)$ dacă $m > 0$ şi $\{-1\}$ dacă $m = 0$. Prin urmare, f este surjectivă pe $\mathbb{R}$ dacă $m > 0$ şi $2m - 1 \leq 1 + m$.

Răspuns corect: *(b)*. □

6. Mulţimea soluţiilor reale ale inecuaţiei

$$\log_5 x > \log_{125}(3x - 2)$$

este

(a) $(-1, 0)$;

(b) $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$;

(c) $(-2, \infty)$;

(d) $\left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup (1, \infty)$.

Soluţie. Condiţiile de existenţă a logaritmilor sunt $x > 0$, $3x - 2 > 0$. Se scriu ambii logaritmi în baza 5 şi obţinem $x^3 - 3x + 2 > 0$, adică $(x+2)(x-1)^2 > 0$.

Răspuns corect: *(d)*. □

7. Soluţiile ecuaţiei

$$5^{2x} - 3 \cdot 5^x + 2 = 0$$

sunt

(a) $x = 0$, $x = \log_5 3$;

(b) $x = \log_5 2$, $x = 0$;

(c) $x = 1$, $x = 2$;

(d) $x = 2$, $x = 0$.

Soluţie. Notăm $y = 5^x$ şi obţinem ecuaţia

$$y^2 - 3y + 2 = 0,$$

cu soluţiile $y = 1$ şi $y = 2$
Răspuns corect: (b). □

8. Numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$x + 2^x + \log_2 x = 7$$

este

(a) 0;

(b) 1;

(c) 2;

(d) 3.

Soluţie. Condiţia de existenţă a logaritmului este $x > 0$. Ecuaţia are o singură soluţie, pentru că funcţia f este continuă, strict crescătoare pentru $x > 0$ şi $\lim_{x\to 0, x>0} = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} = \infty$.
Răspuns corect: (b). □

9. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon \end{pmatrix},$$

unde ϵ este o rădăcină a ecuaţiei $x^2 + x + 1 = 0$. Matricea A^{2016} este:

(a) $3^{1008} I_3$;

(b) $3^{1008}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(c) $3^{1008}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 \end{pmatrix}$;

(d) I_3.

Soluţie. Avem $A^4 = 3^2 I_3$ şi astfel $A^{2016} = (A^4)^{504} = 3^{1008} I_3$.

Răspuns corect: (a). $\square$

10. Termenul care nu îl conţine pe x în dezvoltarea

$$\left(\frac{x-1}{x-x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x-1}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1}\right)^{25}, \quad x>0, \quad x \neq 1,$$

este:

(a) T_{15};

(b) T_{16};

(c) T_{17};

(d) T_{31}.

Soluţie. Avem $\frac{x-1}{x-x^{\frac{1}{2}}} = 1 + x^{-\frac{1}{2}}$ şi $\frac{x-1}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1} = x^{\frac{1}{3}} - 1$, iar expresia din enunţ devine $\left(x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}\right)^{25}$. Deoarece $T_{k+1} = C_{25}^k \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{25-k} \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^k$, se impune condiţia ca puterea lui x să fie egală cu 0 şi se obţine $k = 15$.

Răspuns corect: (b). $\square$

11. Pe mulţimea $G = (0, \infty)$ se defineşte operaţia $*$, prin

$$x * y = \frac{2xy}{x+y}, \quad \forall x, y \in G.$$

Care din următoarele afirmaţii este adevărată?

(a) $(G, *)$ este grup comutativ;

(b) $(G, *)$ este grup necomutativ;

(c) $(G, *)$ este monoid;

(d) legea $*$ nu este asociativă.

Soluţie. Se verifică uşor că legea nu este asociativă.
Răspuns corect: (d). $\square$

12. Limita

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2+1}{n+2} \ln \frac{n+1}{n}},$$

este:

(a) $\frac{1}{2}$;

(b) 1;

(c) e;

(d) ∞.

Soluţie. Expresia de sub radical se poate scrie

$$\frac{n^2+1}{n^2+2n} \ln \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Răspuns corect: (b). $\square$

13. Fie şirul de numere reale

$$x_n = (-1)^{n-1}\left(2+\frac{3}{n}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci:

(a) $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$;

(b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ e şir monoton;

(c) $\min_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = -\frac{7}{2}$ şi $\max_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = 5$;

(d) $\min_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = -2$ şi $\max_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = 2$.

Soluţie. Se explicitează

$$x_n = \begin{cases} -2 - \frac{3}{n}, & n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}^* \\ 2 + \frac{3}{n}, & n = 2k+1, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Cum $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ este subşir crescător şi $(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ este descrescător, avem

$$x_2 < x_4 < \ldots < x_{2k} < \ldots < -2 < 2 < \ldots < x_{2k+1} < \ldots < x_3 < x_1.$$

Răspuns corect: (c). □

14. Valoarea limitei

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+x+1) + \ln(1-x+x^2)}{x^2}$$

este:

(a) 3;

(b) 2;

(c) −1;

(d) 1.

Soluţie. Se aplică regula lui l'Hôspital.
Răspuns corect: (d). □

15. Fie $f : \mathbb{R}\setminus\{-1,1\} \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$. Numărul soluţiilor ecuaţiei $f^{(5)}(x) = 0$ este:

(a) 1;

(b) 2;

(c) 5;

(d) 6.

Soluţie. Descompunem $f(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1}$, de unde obţinem $f^{(5)}(x) = -5!\left(\frac{2}{(x-1)^6} - \frac{1}{(x+1)^6}\right) = 0$, adică $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^6 = 2$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Răspuns corect: (b). □

16. Valorile constantelor reale a, b şi c pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = xe^x + e^{-2x},$$

verifică egalitatea

$$f'''(x) + af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

sunt:

(a) $a = 1, \quad b = -1, \quad c = 2;$

(b) $a = -1, \quad b = -1, \quad c = 3;$

(c) $a = 0, \quad b = -3, \quad c = 2;$

(d) $a = 1, \quad b = 0, \quad c = 3.$

Soluţie. Calculând derivatele şi înlocuind în egalitatea din enunţ, se obţine sistemul

$$\begin{cases} a + b + c + 1 = 0 \\ 2a + b + 3 = 0 \\ 4a - 2b + c - 8 = 0. \end{cases}$$

Răspuns corect: (c). □

17. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \frac{me^x - (1+m)e^{-x}}{1 + e^x}.$$

Să se precizeze valorile lui m pentru care f este strict monotonă pe $\mathbb{R}$.

(a) $m \in [0, \infty);$

(b) $m \in [0, 1];$

(c) $m \in (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$;

(d) $m \in \mathbb{R}$.

Soluţie. Calculăm derivata funcţiei f şi avem

$$f'(x) = \frac{me^x + (1+m)e^{-x} + 2(1+m)}{(1+e^x)^2}.$$

Dacă $m \geq 0$, atunci $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, iar dacă $m \leq -1$, atunci $f'(x) < 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Pentru $-1 < m < 0$, definim $g(x) = me^x + (1+m)e^{-x} + 2(1+m)$ şi avem $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$ şi $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \infty$, deci $f'(x)$ are semn variabil şi nu este monotonă.

Răspuns corect: (c). □

18. Valoarea integralei

$$I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

este:

(a) $\frac{\pi^2}{4}$;

(b) 0;

(c) $\frac{\pi}{2}$;

(d) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

Soluţie. Făcând schimbarea de variabilă $x = \pi - t$ se obţine

$$I = \int_\pi^0 \frac{-(\pi - t)\sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \pi \int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt - I,$$

de unde

$$I = \frac{-\pi}{2} \operatorname{arctg}(\cos t)|_0^\pi.$$

Răspuns corect: (a). □

19. Derivata funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{\operatorname{arctg} x} e^{\operatorname{tg}^2 t} dt$$

este:

(a) $f'(x) = \frac{e^{x^2}}{1+x^2}$;

(b) f' nu există;

(c) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$;

(d) f'^{x^2}.

Soluţie. Considerăm funcţia $g : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $g(t) = e^{\operatorname{tg}^2 t}$. Deoarece g este continuă pe $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, admite primitive pe acest interval. Fie G una din aceste primitive. Atunci

$$f(x) = G(\operatorname{arctg} x) - G(0),$$

de unde rezultă

$$f'(x) = G'(\operatorname{arctg} x)\frac{1}{1+x^2} = g(\operatorname{arctg} x)\frac{1}{1+x^2}.$$

Răspuns corect: (a). □

20. O latură a unui triunghi este situată pe axa Ox, iar celelalte două pe dreptele de ecuaţii $2x - 3y + 6 = 0$ respectiv $3x + 2y - 6 = 0$. Coordonatele ortocentrului sunt:

(a) $(\frac{6}{13}, \frac{27}{13})$;

(b) $(\frac{1}{2}, 2)$;

(c) $(\frac{6}{13}, \frac{30}{13})$;

(d) $(\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$.

Soluţie. Observăm că cele două drepte sunt perpendiculare, deci triunghiul este dreptunghic iar ortocentrul se află la intersecţia acestor drepte.

Răspuns corect (c). □

21. Dacă punctele $A(1,1)$, $B(3,2)$ şi $C(m, m+3)$ sunt coliniare, atunci:

(a) $m = 0$;

(b) $m = -5$;

(c) $m \in \mathbb{R}$;

(d) $m = 3$.

Soluţie. Din condiţia de coliniaritate

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ m & m+3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

se obţine $m = -5$.

Răspuns corect: (b). $\square$

22. Dată matricea coloană $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, îi asociem vectorul $\vec{x} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$. Fie matricile

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U = A\left(-\frac{\pi}{12}\right) \cdot B$ şi $V = A\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot B$. Atunci cosinusul unghiului dintre vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$, asociaţi respectiv matricelor coloană U şi V, are valoarea:

(a) 0;

(b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

(c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

(d) $\dfrac{1}{2}$.

Soluţie. Observăm că $\vec{x} \cdot \vec{y} = X^T \cdot Y$ şi $||\vec{x}||^2 = X^T \cdot X$. Apoi, matricile U şi V corespunzătoare vectorilor $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt:

$$U = A(-\frac{\pi}{12}) \cdot B = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{12} & -\sin \frac{\pi}{12} \\ \sin \frac{\pi}{12} & \cos \frac{\pi}{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \\ \sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} \end{pmatrix}$$

şi

$$V = A(\frac{\pi}{6}) \cdot B = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & \sin \frac{\pi}{6} \\ -\sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \\ -\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}.$$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||} = \frac{U^T \cdot V}{\sqrt{U^T \cdot U}\sqrt{V^T \cdot V}} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Răspuns corect: (c). $\square$

23. Măsura unghiului dintre vectorii $\bar{a} = -3\bar{i} + 4\bar{j}$ şi $\bar{b} = 8\bar{i} + 6\bar{j}$ este egală cu:

(a) 0;

(b) $\frac{\pi}{2}$;

(c) $\frac{3\pi}{2}$;

(d) $\frac{\pi}{3}$.

Soluţie. Avem
$$\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = 0.$$

Răspuns corect: (b). $\square$

24. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$. Partea reală a numărului complex
$$\left(\operatorname{ctg}\frac{(2k+1)\pi}{2n} + i\right)^n$$
este egală cu:

(a) 1;

(b) -1;

(c) 0;

(d) 2.

Soluţie. Folosind formula lui Moivre, avem
$$\left(\operatorname{ctg}\frac{(2k+1)\pi}{2n} + i\right)^n = \frac{\cos\frac{(2k+1)\pi}{2} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2}}{\left(\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)^n} = i\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi}{2}}{\left(\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)^n}$$

Răspuns corect: (c). $\square$

25. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei
$$\sqrt{3}\sin 4x + 8\sin^2 x\cos^2 x = 1$$
este:

(a) $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

(b) $\left\{\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

(c) $\left\{\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

(d) $\left\{\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Soluţie. Folosind formulele $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ şi $\sin^2 2x = \frac{1-\cos 4x}{2}$, se obţine ecuaţia

$$\sqrt{3}\sin 4x - \cos 4x = 0,$$

de unde

$$x = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Răspuns corect: (c). $\square$