Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iaşi
Facultatea de Automatică şi Calculatoare
Admitere – sesiunea 2021
Domeniile: Calculatoare şi Tehnologia Informaţiei
Ingineria sistemelor (Automatică şi informatică aplicată)

Subiecte (model 2) la testul grilă de Matematică

1. Numărul complex $z = i\sqrt{3} - 1$, unde i este unitatea imaginară, are conjugatul $\overline{z}$. Atunci $(\overline{z})^3$ aparţine mulţimii:
(a) $\mathbb{N}$; **(b)** $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; **(c)** $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$; **(d)** $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$.
Rezolvare. $(\overline{z})^3 = \left(-1 - i\sqrt{3}\right)^3 = -\left(1 + i\sqrt{3}\right)^3 =$
$= -\left(1 + 3\left(i\sqrt{3}\right)^1 + 3\left(i\sqrt{3}\right)^2 + \left(i\sqrt{3}\right)^3\right) = -\left(1 + 3i\sqrt{3} - 3 \cdot 3 - i \cdot 3\sqrt{3}\right)$
$(\overline{z})^3 = 8 \in \mathbb{N}$
Răspuns corect (a).

2. Fie parametrul $m \in \mathbb{R}$ şi ecuaţia
$mx^2 + (m+1)\,x + m - 1 = 0.$
Atunci condiţia necesară şi suficientă ca ecuaţia anterioară să nu admită rădăcini reale este:
(a) $m \in \left(3 - 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3}\right)$; **(b)** $m \in \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$;
(c) $m \in \left[1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$; **(d)** $m \in \left(-\infty, 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.
Rezolvare. $m = 0 \Rightarrow \exists x = 1 \in \mathbb{R}$.
$m \neq 0 \Rightarrow \Delta = -3m^2 + 6m + 1$.
nu admite rădăcini reale$\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 6m + 1 < 0 \Leftrightarrow 3m^2 - 6m - 1 > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow m \in \left(-\infty, 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.
Răspuns corect (d).

3. $\begin{cases} a_2 = 5 \\ a_5 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + r = 5 \\ a_1 + 4r = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ r = 3 \end{cases}$
$S = a_1 + a_2 + ... + a_{10} = \dfrac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = \dfrac{(a_1 + a_1 + 9r) \cdot 10}{2} = \dfrac{(2a_1 + 9r) \cdot 10}{2}$
$S = \dfrac{(2 \cdot 2 + 9 \cdot 3) \cdot 10}{2} = 31 \cdot 5 = 155.$
Răspuns corect (a).

4. Dintre 6 elevi de clasa a XI-a şi 4 elevi de clasa a XII-a se aleg 5 persoane pentru a forma o echipă de lot pentru un hackathon. În câte moduri se poate alcătui această echipă, ştiind că în componenţa ei trebuie să fie cel puţin 3 elevi de clasa a XII-a?
(a) 60; **(b)** 66; **(c)** 864; **(d)** 144.
Rezolvare. Echipa se poate forma:
-din 3 elevi de clasa XII-a şi 2 de clasa a XI-a în $C_4^3 \cdot C_6^2$ moduri;
-din 4 elevi de clasa XII-a şi 1 de clasa a XI-a în $C_4^4 \cdot C_6^1$ moduri.
În total sunt un număr de moduri egal cu: $C_4^3 \cdot C_6^2 + C_4^4 \cdot C_6^1 = 4 \cdot 15 + 1 \cdot 6 = 66$.
Răspuns corect (b).

5. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{-2x}$. Atunci:
(a) funcţia derivată f' este monoton descrescătoare pe $\mathbb{R}$;
(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f'(2021)+f''(2021)+...+f^{(n)}(2021)}{f^{(n)}(2021)}=\dfrac{-1}{3}$;
(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f'(2)+f''(2)+...+f^{(n)}(2)}{f^{(n)}(2)}=\dfrac{2}{3}$;
(d) graficul funcţiei derivate f' are asimptotă verticală.
Rezolvare. Se determină:
$f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f'(x)=-2e^{-2x}$;
$f'':\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f''(x)=(-2)^2e^{-2x}$;
...
$f^{(n)}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f^{(n)}(x)=(-2)^ne^{-2x}$.
Deoarece $f''(x)=(-2)^2e^{-2x}>0, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ funcţia derivată f' este strict crescătoare.

$$E(x)=\frac{f'(x)+f''(x)+...+f^{(n)}(x)}{f^{(n)}(x)}=\frac{\left[(-2)+(-2)^2+...+(-2)^n\right]\cdot e^{-2x}}{(-2)^n\cdot e^{-2x}}=$$
$$=\frac{1}{(-2)^n}\cdot(-2)\cdot\frac{(-2)^n-1}{(-2)-1}=\frac{2}{3}\cdot\left[1-\left(\tfrac{-1}{2}\right)^n\right], \forall x\in\mathbb{R}$$

Răspuns corect (c).

6. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{21+|x-21|}$. Atunci o primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcţiei f este:

(a) $F(x)=\begin{cases}\ln 21-\ln(2\cdot 21-x), & x\le 21\\ \ln x-\ln 21, & x>21\end{cases}$; **(b)** $F(x)=\begin{cases}2-\ln(2\cdot 21-x), & x\le 21\\ \ln x, & x>21\end{cases}$;

(c) $F(x)=21+\ln|21+|x-21||$; **(d)** $F(x)=\begin{cases}\ln(2\cdot 21-x), & x<21\\ \ln 21 & x=21\\ \ln x, & x>21\end{cases}$.

Rezolvare. Se explicitează

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\cdot 21-x}, & x\le 21\\ \dfrac{1}{x}, & x>21\end{cases}\Rightarrow F(x)=\begin{cases}-\ln(2\cdot 21-x)+C_1, & x<21\\ C_2 & x=21\\ \ln x+C_3, & x>21\end{cases}.$$

Pentru ca F să fie o primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcţiei f, se impune ca F să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$, deci şi continuă pe $\mathbb{R}$, deci şi continuă în $x=21$. Se obţine $-\ln 21+C_1=\ln 21+C_3=C_2\overset{\text{se notează}}{=}C$.
Atunci primitivele lui f pe $\mathbb{R}$ sunt:

$$F(x)=\begin{cases}-\ln(2\cdot 21-x)+\ln 21+C, & x\le 21\\ \ln x-\ln 21+C, & x>21\end{cases}.$$

Răspuns corect: (a).

7. Fie ΔABC cu $BC=8$ şi $\cos A=\frac{4}{5}$. Diametrul cercului circumscris are valoarea:
(a) 10; **(b)** $\dfrac{40}{3}$; **(c)** 11; **(d)** 8.
Rezolvare. $\cos A=\dfrac{3}{5}>0\Rightarrow\mu(A)\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.
Atunci $\sin A=+\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{3}{5}$. Din teorema sinusurilor$\Rightarrow$
$\dfrac{BC}{\sin A}=2R\Rightarrow 2R=\dfrac{8}{\frac{3}{5}}=\dfrac{40}{3}$.
Răspuns corect (b).

8. Mulţimea M a tuturor soluţiilor ecuaţiei $7^{2\sqrt{x-1}} - 10 \cdot 7^{\sqrt{x-1}} + 21 = 0$ este:
(a) $M = \{3, 7\}$; **(b)** $M = \{1, \log_7 3\}$; **(c)** $M = \left\{2, 1 + (\log_7 3)^2\right\}$; **(d)** $M = \{2\}$.
Rezolvare. C.E.: $x \geq 1$.
Se face schimbarea de variabilă de ecuaţie $t = 7^{\sqrt{x-1}} > 0$ şi ecuaţia devine
$t^2 - 10t + 21 = 0 \Rightarrow t_1 = 7 > 0$ sau $t_2 = 3 > 0$.
Atunci:
$7^{\sqrt{x-1}} = 7 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Rightarrow x = 2 \geq 1$.
$7^{\sqrt{x-1}} = 3 \Rightarrow \sqrt{x-1} = \log_7 3 \geq 0 \Rightarrow x = 1 + (\log_7 3)^2 \geq 1$.
Răspuns corect (c).

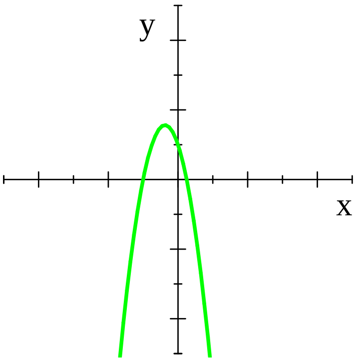
9. Fie $\overrightarrow{r_A} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{r_B} = -\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{r_C} = 2\overrightarrow{i} + 7\overrightarrow{j}$ vectorii de poziţie ai vârfurilor triunghiului ABC şi $\overrightarrow{r_G}$ vectorul de poziţie al centrului de greutate a triughiului. Atunci cosinusul unghiului format de $\overrightarrow{r_A}$ şi $\overrightarrow{r_G}$ este:
(a) $\frac{3}{\sqrt{10}}$; **(b)** $\frac{1}{\sqrt{10}}$; **(c)** $\frac{1}{\sqrt{5}}$; **(d)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Rezolvare. $\overrightarrow{r_G} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}\right) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{2 \cdot 1 - 1 \cdot 1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$
Răspuns corect (b).

10. Se dă funcţia $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{1 - \ln(e-x)}$. Domeniul maximal de continuitate pentru f este:
(a) $\mathbb{D} = (0, e)$; **(b)** $\mathbb{D} = [0, 1]$; **(c)** $\mathbb{D} = (0, 1]$; **(d)** $\mathbb{D} = [0, e)$.
Rezolvare. $C.E. \begin{cases} x \geq 0 \\ -1 \leq \sqrt{x} \leq 1 \\ e - x > 0 \\ 1 - \ln(e-x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [0,1] \\ x \in (-\infty, e) \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow D_E = (0, 1]$.
Pe domeniul de existenţă, f este continuă.
Răspuns corect (c).

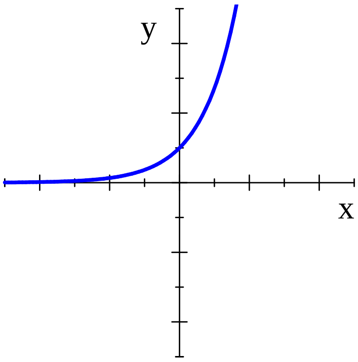
11. Derivata funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{\sin x} e^{t^2} dt$ este:
(a) $f'(x) = e^{\sin^2 x} - e^{x^4}$; **(b)** f' nu există;
(c) $f'(x) = e^{\sin^2 x} \cdot \cos x - e^{x^4} \cdot 2x$; **(d)** $f'(x) = e^{\sin^2 x} \cdot \cos x - e^{x^2}$.
Rezolvare. Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(t) = \ln\left(1 + \sin^2 t\right)$. Deoarece g este continuă pe $\mathbb{R}$, funcţia admite primitive pe $\mathbb{R}$, chiar dacă acestea nu pot fi exprimate cu funcţii elementare. Fie G o astfel de primitivă. Atunci
$f(x) = G(\arcsin x) - G\left(\frac{\pi}{4}\right), \forall x \in (-1, 1) \Rightarrow$
$f'(x) = (G'(\arcsin x))(\arcsin x)' - 0 = (g(\arcsin x))\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in (-1, 1)$.
Răspuns corect (b).

12. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -4x^2 - 3x + 1, & \text{dacă } x < 0 \\ e^x & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$:
(a) nu este monotonă pe $\mathbb{R}$; **(b)** este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$;
(c) este injectivă pe $\mathbb{R}$; **(d)** nu este surjectivă.

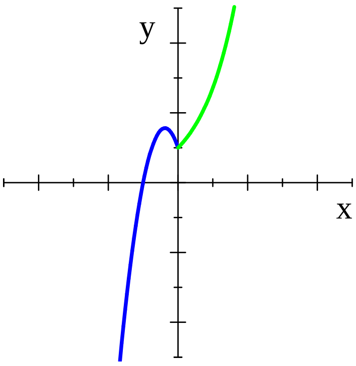
Rezolvare. Se reprezintă graficul pentru $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -4x^2 - 3x + 1$:
$-4x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$ şi $x_2 = \frac{1}{4} : (-1, 0), \left(\frac{1}{4}, 0\right)$.
$x = 0 \Rightarrow f(0) = 1 : (0, 1)$.
$V\left(\frac{3}{-8}, \frac{25}{16}\right)$.



Se reprezintă graficul pentru $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x$:



Se reprezintă $G_f = G_{f_1|_{(-\infty,0)}} \cup G_{f_2|_{[0,\infty)}}$:



Din grafic rezultă că:

-f nu este monotonă pe $\mathbb{R}$, deoarece este crescătoare pe $\left(-\infty, \frac{-3}{8}\right]$, descrescătoare pe $\left(\frac{-3}{8}, 0\right)$, crescătoare pe $[0, \infty)$.

-f nu este injectivă pe $\mathbb{R}$, deoarece există o dreaptă $y = 1$ paralelă cu Ox care intersectează reprezentarea graficului în 2 puncte :$(0, 1), \left(-\frac{3}{4}, 1\right)$; există chiar şi drepte paralele cu Ox care intersectează reprezentarea graficului în 3 puncte.

-f este surjectivă pe $\mathbb{R}$, deoarece orice dreaptă paralelă cu Ox intersectează reprezentarea graficului în măcar un punct (în 1 sau 2 sau 3).

Răspuns corect (a).

13. Fie $A = \{2020, 2021, 2022\}$ şi $B = \{10, 20, 30, 40, 50\}$. Probabilitatea de a alege din mulţimea tuturor funcţiilor $f : A \to B$ o funcţie injectivă este

(a) $\frac{12}{25}$; **(b)** $\frac{12}{15}$; **(c)** $\frac{24}{125}$; **(d)** $\frac{20}{81}$.

Rezolvare. Se determină numărul evenimentelor posibile, adică numărul funcţiilor $f : A \to B$, având $cardA = 3, cardB = 5$:

$(cardB)^{cardA} = 5^3 = 125.$

Se determină numărul evenimentelor favorabile producerii evenimentului de a alege o funcţie injectivă din cele 125 :

$A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 60.$

Atunci $P(A) = \frac{60}{125} = \frac{12}{25}$.

Răspuns corect (a).

14. Fie $A = (a_{ij})_{i=\overline{1,3}, j=\overline{1,3}}$ şi $B = (b_{ij})_{i=\overline{1,3}, j=\overline{1,3}}$ două matrice cu $a_{ij} = \min(i, j)$ şi $b_{ij} = \max(i, j)$, $i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$. Atunci:

(a) $\det(A - B) = -2$; **(b)** $\det(A + B) = 4$; **(c)** $\operatorname{rang}(A - B) = 2$; **(d)** $\operatorname{rang}(A + B) = 2$.

Rezolvare.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \det A = 1; \det B = 3.$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}; A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \det(A - B) = -4; \det(A + B) = 0.$$

Răspuns corect (d).

15. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 3$. Atunci:

(a) f admite puncte de extrem local, iar abscisele lor sunt 2 şi 4;

(b) f admite puncte de extrem local, iar abscisele lor sunt 19 şi 23;

(c) f este convexă pe $(-\infty, 2]$;

(d) f este crescătoare pe $[2, 4]$.

Rezolvare. Se observă că f este derivabilă de două ori pe $\mathbb{R}$, cu

$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 - 18x + 24.$

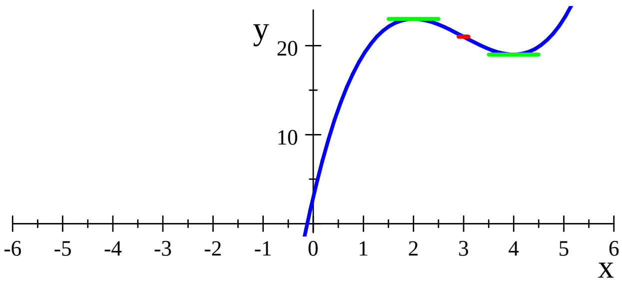
$f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f''(x) = 6x - 18.$

Se studiază dacă punctele staţionare găsite, care sunt în domeniul funcţiei, sunt de extrem local, folosind tabelul de variaţie a funcţiei. Se precizează în tabel şi semnul lui f''.

x	$-\infty$		2		3		4		∞
$f'(x)$	$+$	$+++$	0	$---$	$-$	$---$	0	$+++$	$+$
$f''(x)$	$-$	$---$	$-$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow\nearrow\nearrow$ concavă	23	$\searrow\searrow\searrow$ concavă	21	$\searrow\searrow\searrow$ convexă	19	$\nearrow\nearrow\nearrow$ convexă	∞

Se observă că $x = 2$ este punct de maxim local, cu $f(2) = 23$ valoarea maximă local şi că $x = 4$ este punct de minim local, cu $f(4) = 19$ valoarea minimă local.

Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 3$ este



Răspuns corect (a).

16. Fie parametrul $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j}$ să fie perpendiculari. Atunci $E = m + \sin\dfrac{5\pi}{6} \cdot \cos\dfrac{7\pi}{4}$ este:

(a) $\dfrac{\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{4}$; **(b)** $\dfrac{-\sqrt{2}}{4}$; **(c)** 0; **(d)** $\dfrac{1-2\sqrt{2}}{4}$.

Rezolvare. $\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j}$ sunt perpendiculari$\Rightarrow$

$-1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \cdot m = 0 \Rightarrow m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}; \cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$E = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Răspuns corect (b).

17. Se dă şirul

$x_n = 1 + \dfrac{2020}{2021} + \left(\dfrac{2020}{2021}\right)^2 + ... + \left(\dfrac{2020}{2021}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir descrescător; **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2021}$;
(c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$; **(d)** $x_n < 2021, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare. $x_{n+1} - x_n = \left(\dfrac{2020}{2021}\right)^{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$x_n = 1 \cdot \frac{\left(\frac{2020}{2021}\right)^n - 1}{\frac{2020}{2021} - 1} = 2021\left[1 - \left(\frac{2020}{2021}\right)^n\right], \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2021$.

Răspuns corect: (d).

18. Fie $a > 1$ un parametru real dat. Mulţimea M a soluţiilor $x > 1$ ale inecuaţiei

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{8+\log_a x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_a^2 x}$$

este:

(a) $M = \left(1, a^8\right)$; **(b)** $M = \left(1, 1 + a^{-4}\right)$; **(c)** $M = \left(a^8, +\infty\right)$; **(d)** $M = \emptyset$.

Rezolvare. $C.E. \left\{ x > 0\text{-se verifică pentru } x > 1 \right. \Rightarrow$

$\left(\dfrac{1}{16}\right)^{8+\log_a x} > \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_a^2 x} \Rightarrow 2^{-4(8+\log_a x)} > 2^{-\log_a^2 x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 32 + 4\log_a x < \log_a^2 x \Rightarrow \log_a^2 x - 4\log_a x - 32 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\log_a x - 8)(\log_a x + 4) > 0 \Rightarrow \log_a x \in (-\infty, -4) \cup (8, \infty)$.
Pentru $a > 1, x > 1 \Rightarrow \log_a x > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_a x > 8 = \log_a a^8 \underset{\log_a \text{ crescătoare}}{\overset{a>1}{\Rightarrow}} x > a^8$.
$M = (a^8, \infty) \cap (1, \infty) = (a^8, +\infty)$.
Răspuns corect (c).

19. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia

$$f : (-2, 2) \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -1 + 2ax, & \text{dacă } x \in (-2, 1] \\ \dfrac{\sqrt{x^2+8} - 3}{x^2 - 3x + 2}, & \text{dacă } x \in (1, 2) \end{cases}$$

să fie continuă pe $(-2, 2)$.
(a) $a = \frac{-2}{3}$; **(b)** $a = \frac{1}{3}$; **(c)** $a = \frac{-1}{3}$; **(d)** nu există a cu proprietatea cerută.
Rezolvare. Pe intervalele $(-2, 1)$ şi $(1, 2)$, f este funcţie continuă.
$f(1) = -1 + 2a$;
$l_s(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (-1 + 2ax) = -1 + 2a$;

$$l_d(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{\sqrt{x^2+8} - 3}{x^2 - 3x + 2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{(x^2+8) - 9}{(x^2 - 3x + 2)\left(\sqrt{x^2+8} + 3\right)} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{x^2+8} + 3\right)} = \frac{-1}{3}.$$

f continuă în $1 \Rightarrow -1 + 2a = \frac{-1}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$.
Răspuns corect (b).

20. Fie $m \in \mathbb{R}$. Sistemul $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + my + z = 3 \\ x + my + mz = 3 \end{cases}$ este:
(a) compatibil unic determinat, $\forall m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ **(b)** incompatibil, pentru $m = 1$;
(c) compatibil nedeterminat, pentru $m = 2$; **(d)** incompatibil, pentru $m = 2$.
Rezolvare. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m & m \end{vmatrix} = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$.
Răspuns corect (a).

21. Fie $(d_1) : 2x + ay - 7 = 0$ acea dreaptă în plan pentru care $a \in \mathbb{R}$ se determină din condiţia ca punctul $A(2, 1)$ să aparţină dreptei. Fie (d_2) acea dreaptă în plan care trece prin punctele $B(0, 4)$ şi $C(6, 0)$. Atunci:
(a) dreptele (d_1) şi (d_2) sunt perpendiculare;
(b) dreptele (d_1) şi (d_2) se intersectează în $M\left(1, \frac{7}{3}\right)$;
(c) dreptele (d_1) şi (d_2) coincid;
(d) dreptele (d_1) şi (d_2) sunt paralele.
Rezolvare. $A(2, 1) \in (d_1) \Rightarrow 2 \cdot 2 + a \cdot 1 - 7 = 0 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow (d_1) : 2x + 3y - 7 = 0$.
$B(0, 4) \in (d_2)$ şi $C(6, 0) \in (d_2) \Rightarrow (d_2) : \frac{x - 0}{6 - 0} = \frac{y - 4}{0 - 4} \Rightarrow (d_2) : 4x + 6y - 24 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (d_2) : 2x + 3y - 12 = 0$.
Dreptele (d_1) şi (d_2) sunt paralele.
Răspuns corect (d).

22. Fie $I_1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$ şi $I_2 = \int_2^3 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$. Atunci $I_1 + I_2$ este:

(a) $\frac{2\pi}{9}\sqrt{3} - \ln\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\ln 3 - 2\sqrt{2}\ln 2 - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$;**(b)** $-\frac{2\pi}{9}\sqrt{3} + \ln 3 - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$;

(c) $\frac{2\pi}{9}\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ln 3 - 2\sqrt{2}\ln 2 - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$;**(d)** $\frac{2\pi}{9}\sqrt{3} + \frac{1-\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3}\ln 3 - 2\sqrt{2}\ln 2$.

Rezolvare. $I_1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x \cdot (\operatorname{tg} x)' \, dx = x \cdot (\operatorname{tg} x)\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}^{x=\frac{\pi}{3}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\operatorname{tg} x)\, dx =$

$= \frac{\pi}{3}\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \ln(\cos x)\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}^{x=\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{9}\sqrt{3} + \ln\frac{1}{2} - \ln\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{9}\sqrt{3} - \ln\sqrt{3}.$

$I_2 = \int_2^3 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\int_2^3 \ln x \cdot (\sqrt{x})' \, dx = 2\ln x \cdot \sqrt{x}\Big|_{x=2}^{x=3} - 2\int_2^3 \frac{1}{x}\sqrt{x} dx =$

$= 2\sqrt{3}\ln 3 - 2\sqrt{2}\ln 2 - 4\sqrt{x}\Big|_{x=2}^{x=3} = 2\sqrt{3}\ln 3 - 2\sqrt{2}\ln 2 - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{2}.$

Răspuns corect (a).

23. Pe mulţimea $G = \mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie asociativă şi comutativă:

$x * y = xy - x - y + 2, \forall x, y \in \mathbb{R}.$

Fie e elementul neutru al legii de compoziţie anterioare şi z soluţia ecuaţiei $z * 2022 = e$. Atunci:

(a) $z = \frac{2022}{2021}$; **(b)** $z = \frac{1}{2022}$; **(c)** $z = \frac{2021}{2022}$; **(d)** $z = \frac{-2021}{2022}$.

Rezolvare. $x * e = x \Rightarrow xe - x - e + 2 = x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$(x-1)(e-2) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e = 2.$

$z * 2022 = e \Rightarrow 2022z - z - 2022 + 2 = 2 \Rightarrow z = \frac{2022}{2021}.$

Răspuns corect (a).

24. Produsul

$(\operatorname{tg} 1^\circ - \operatorname{ctg} 1^\circ) \cdot (\operatorname{tg} 2^\circ - \operatorname{ctg} 2^\circ) \cdot \ldots \cdot (\operatorname{tg} 89^\circ - \operatorname{ctg} 89^\circ)$

este:

(a) 0; **(b)** $\frac{1}{2^{89}}$; **(c)** $\frac{-1}{2^{89}}$; **(d)** 1.

Rezolvare. $\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ = 0.$

Răspuns corect (a).

25. Fie $A(-2,-1), B(1,2), C(0,5)$ vârfurile unui triunghi. Să se ordoneze măsurile în grade ale unghiurilor triunghiului.

(a) $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$; **(b)** $m(\widehat{A}) > m(\widehat{C}) > m(\widehat{B})$;

(c) $m(\widehat{C}) < m(\widehat{A}) < m(\widehat{B})$; **(d)** $m(\widehat{A}) < m(\widehat{C}) < m(\widehat{B})$.

Rezolvare. $AB = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-2)^2} = 3\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(1-0)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{10}$

$CA = \sqrt{(0+2)^2 + (5+1)^2} = 2\sqrt{10}$

$BC < AB < CA \Rightarrow m(\widehat{A}) < m(\widehat{C}) < m(\widehat{B}).$

Sau prin calcul: $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|}$, unde α este măsura în radiani a $\widehat{A}$, ş.a.m.d.

Răspuns corect (d).