Model 7 test admitere AC - 2022

1. Mulţimea valorilor parametrului $\lambda \in \mathbb{R}$ pentru care

$$x^2 - 2\lambda x + \lambda < 0$$

are loc pentru orice $x \in [0, 1]$ este:

(a) $(0, 1)$;
(b) $[0, 1]$;
(c) $\emptyset$;
(d) $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

Soluţie. Considerăm ecuaţia polinomială de gradul 2

$$x^2 - 2\lambda x + \lambda = 0,$$

cu $\Delta = 4\lambda(\lambda - 1)$. Se studiază valorile posibile ale rădăcinilor ecuaţiei şi se ţine cont că inegalitatea are loc dacă şi numai dacă $\Delta > 0$ şi rădăcinile $x_1 < x_2$ sunt reale, astfel încât $[0, 1] \subset [x_1, x_2]$.

Răspuns corect: (c). □

2. Mulţimea valorilor reale ale lui x pentru care

$$\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b} + \sqrt{x-c} + d = 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad d > 0,$$

este:

(a) $\emptyset$;
(b) $\left\{\pm\sqrt{|a-c|}, \pm\sqrt{|b|}\right\}$;
(c) $\left\{\pm\sqrt{|a|}, \pm\sqrt{|c|}\right\}$;
(d) $\left\{-\sqrt{\frac{|a+b+c|}{2}}, \sqrt{\frac{|a+b+c|}{2}}\right\}$.

Soluţie. Se observă că $\sqrt{x-a} \geq 0$, $\sqrt{x-b} \geq 0$, $\sqrt{x-c} \geq 0$ şi se ţine cont că $d > 0$.

Răspuns corect: (a). □

3. Mulţimea soluţiilor inecuaţiei

$$\sqrt{\frac{1+4x}{x}} < 1$$

este:

(a) $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$;
(b) $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup (0, \infty)$;
(c) $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right]$;
(d) $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right] \cup (0, \infty)$.

Soluţie. Se rezolvă inegalităţile $\frac{1+4x}{x} \geq 0$ şi $\frac{1+4x}{x} < 1$.
Răspuns corect: (c). $\square$

4. Mulţimea valorilor parametrului real m pentru care funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 2mx - 1, & x \leq 0 \\ mx - 1, & x > 1 \end{cases}$$

este injectivă pe $\mathbb{R}$ este:

(a) $(-\infty, -1)$;
(b) $(1, \infty)$;
(c) $(-\infty, 0)$;
(d) $(0, \infty)$.

Soluţie. Fie $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2 + 2mx - 1$. Se verifică uşor că f_1 este strict descrescătoare pe $(-\infty, -m]$ şi strict crescătoare pe $[-m, \infty)$. Pentru ca f să fie injectivă pe $\mathbb{R}$ este necesar ca f_1 să fie injectivă pe $(-\infty, 0]$, deci $-m \geq 0$, adică $m \leq 0$.

Dacă $m = 0$ atunci funcţia $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = mx - 1$ este constantă, deci f nu este injectivă.

Dacă $m < 0$ atunci f_2 este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$. Cum $f_1(0) = -1 \geq -1 = f_2(0)$, rezultă că f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$, deci injectivă.

Răspuns corect: (c). $\square$

5. Valoarea expresiei

$$E = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} + \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$$

este:

(a) 4;
(b) $2\sqrt{5}$;
(c) 18;
(d) 6.

Soluţie. Se observă că $9 - 4\sqrt{5} = (2 - \sqrt{5})^2$ şi $9 + 4\sqrt{5} = (2 + \sqrt{5})^2$ şi se ţine cont de faptul că $\sqrt{5} > 2$.

Răspuns corect: (b). $\square$

6. Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$e^x + 1 = 2e^{-x}$$

este:

(a) $\{0\}$
(b) $\{-2, 1\}$;
(c) $\{1\}$;
(d) $\emptyset$.

Soluţie. Notăm $e^x = t$ şi obţinem ecuaţia $t^2 + t - 2 = 0$, cu soluţiile $t = -2$ şi $t = 1$. Cum $t = e^x > 0$, rezultă $t = 1$, adică $x = 0$.

Răspuns corect: (a). $\square$

7. Dacă $\log_{12} 2 = k$, atunci $\log_6 16$ are valoarea

(a) $\frac{k}{1-k}$;
(b) $\frac{1-k}{k}$;
(c) $\frac{4k}{1-k}$;
(d) $\frac{1-k}{4k}$.

Soluţie. Din $\log_{12} 2 = k$ avem că $12^k = 2$ şi, prin urmare, $6^k = 2^{1-k}$, adică $6 = 2^{\frac{1-k}{k}}$. Notăm $\log_6 16 = p$ şi obţinem $6^p = 16$, adică $2^{\frac{p(1-k)}{k}} = 2^4$.

Răspuns corect: (c). $\square$

8. Mulţimea valorilor parametrului real m pentru care inegalitatea

$$(m-2)4^x + (2m-3)2^{x+1} + m > 2$$

este adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este:

(a) $[2, \infty)$;
(b) $(2, \infty)$;
(c) $(-\infty, 2)$;
(d) $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.

Soluţie. Rescriem inegalitatea

$$(m-2)2^{2x} + (4m-6)2^x + m - 2 > 0,$$

notăm $2^x = t$ şi studiem semnul funcţiei polinomiale $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = (m-2)t^2 + (4m-6)t + m - 2$, pe intervalul de definiţie, în funcţie de valorile lui m.

Răspuns corect: (a). $\square$

9. Mulţimea soluţiilor reale ale inecuaţiei

$$\log_3 x > \log_9(5x - 4)$$

este

(a) $\left(0, \frac{4}{5}\right) \cup (1, \infty)$;
(b) $(0, 1) \cup (4, \infty)$;
(c) $\left(\frac{4}{5}, 1\right) \cup (4, \infty)$;
(d) $\mathbb{R}$.

Soluţie. Se impun condiţiile de existenţă a logaritmilor, $x > 0$, $x > \frac{4}{5}$, şi apoi se observă că inegalitatea din enunţ este echivalentă cu $x^2 > 5x - 4$.

Răspuns corect: (c). $\square$

10. Numărul termenilor care nu îl conţin pe x în dezvoltarea

$$\left(\sqrt[4]{x\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^{2022},$$

este egal cu:

(a) 1;
(b) 0;
(c) 10;
(d) 237.

Soluţie. Impunem ca termenul general al dezvoltării, $T_{k+1}=C_{2022}^{k}\left(x^{\frac{3}{8}}\right)^{2022-k}\left(2x^{-\frac{1}{3}}\right)^{k}$, să nu depindă de x şi obţinem $k=\frac{18198}{17}\notin\mathbb{N}$.

Răspuns corect: (b). □

11. Fie matricea

$$A=\begin{pmatrix}1&4&0\\0&3&1\\2&0&1\end{pmatrix}.$$

Valoarea lui $d=\det(A^{-1})$ este:

(a) $d=1$;
(b) $d=11$;
(c) $d=\frac{1}{11}$;
(d) matricea A nu este inversabilă.

Soluţie. Avem $\det A=11\neq 0$, deci A este inversabilă şi $\det A\det(A^{-1})=1$.

Răspuns corect: (c). □

12. Dacă $a_n=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$, $n\geq 2$, atunci:

(a) $a_{n+1}<a_n,\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\ln 2$;
(b) $a_{n+1}<a_n,\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\ln\frac{1}{2}$;
(c) $a_n<a_{n+1},\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{\ln 2}$;
(d) $a_{n+1}<a_n,\quad \lim_{n\to\infty}a_n=1-\ln 2$.

Soluţie. Avem $a_n=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\frac{5}{3}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\frac{n+1}{n}\right)=\ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$.

Astfel $a_{n+1}-a_n=\ln\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}<0$ şi $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)=\ln\frac{1}{2}$.

Răspuns corect: (b). □

13. Fie şirul de numere reale

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=\begin{cases}a_n+\frac{1}{2}, & n=par\\ \frac{a_n}{3}, & n=impar.\end{cases}$$

Atunci limita $\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}$:

(a) nu există;

(b) are valoarea $\frac{1}{2}$;
(c) are valoarea $\frac{2}{3}$;
(d) are valoarea $\frac{3}{4}$.

Soluţie. Pentru uşurinţa calculelor notăm $r = \frac{1}{2}$ şi $q = \frac{1}{3}$. Calculând câţiva termeni ai şirului se observă, şi apoi se demonstrează prin inducţie, că $a_{2n+1} = q^n + r\frac{1-q^n}{1-q}$.

Răspuns corect: (d). □

14. Se consideră şirul de numere reale

$$x_n = \frac{2+(-1)^n}{2n+(-1)^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Atunci

(a) şirul este crescător;
(b) nu există $\lim_{n\to\infty} x_n$;
(c) nu există $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$;
(d) $\max_{n\in\mathbb{N}} x_n = 1$.

Soluţie. Avem $x_n = \begin{cases} \frac{3}{2n+1}, & n = par \\ \frac{1}{2n-1}, & n = impar \end{cases}$. Astfel subşirurile (x_{2n}) şi (x_{2n+1}) sunt descrescătoare. Prin urmare, avem $\max_{n\in\mathbb{N}} x_n = \max\{x_0, x_1\} = 3$ şi $0 < x_n \leq 3$. Mai mult, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. În sfˆarşit, se verifică uşor că

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \begin{cases} \frac{1}{3}, & n = par \\ \frac{6n-3}{2n+1}, & n = impar, \end{cases}$$

ceea ce arată că şirul $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ admite două subşiruri cu limite diferite.

Răspuns corect: (c). □

15. Valoarea limitei $L = \lim_{x\to\infty}(\sin(\ln(x+1)) - \sin(\ln x))$ este:

(a) $L = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
(b) $L = -1$;
(c) $L = 1$;
(d) $L = 0$.

Soluţie. Folosind formula diferenţei de sinusuri obţinem

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to\infty} 2\sin\frac{\ln(x+1)-\ln x}{2}\cos\frac{\ln(x+1)+\ln x}{2} \\ &= \lim_{x\to\infty} 2\sin\left(\frac{1}{2}\ln(\frac{x+1}{x})\right)\cos\frac{\ln(x+1)+\ln x}{2} = 0. \end{aligned}$$

Răspuns corect: (d). □

16. Valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = mx - \ln\left(x^2 + 1\right)$$

este crescătoare pe $\mathbb{R}$ sunt:

(a) $m \leq 1$;
(b) $m \in (0, 1]$;
(c) $m \geq 1$;
(d) $m \in [0, 1]$.

Soluţie. Calculând derivata funcţiei se obţine $f' = m - \frac{2x}{x^2+1}$. Deoarece $f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, iar $\frac{2x}{x^2+1} \leq 1$, cu egalitate pentru $x = 1$, rezultă că $m \geq 1$.

Răspuns corect: (c). □

17. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \frac{x^2}{e^{1-x}}.$$

Valoarea lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $f^{(n)}(1) = 57$ este:

(a) $n = 6$;
(b) $n = 8$;
(c) $n = 7$;
(d) $n = 10$.

Soluţie. Scriem $f(x) = x^2 e^{x-1}$ şi, prin calcul, deducem că

$$f^{(n)}(x) = \left(C_n^0 x^2 + 2C_n^1 x + 2C_n^2\right) e^{x-1},$$

de unde

$$f^{(n)}(1) = n^2 + n + 1.$$

Răspuns corect: (c). □

18. Derivata funcţiei

$$f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \arctan\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

este:

(a) x;
(b) $2x$;
(c) $\frac{1}{2}$;
(d) x^2.

Soluţie. Putem scrie $\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{(1-\cos x)^2}{(1+\cos x)(1-\cos x)} = \frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}$. Deoarece $\sin x > 0$ pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, avem $f(x) = \arctan \frac{1-\cos x}{\sin x}$.

Răspuns corect: (c). □

19. Fie $I = \int_0^2 f(x)dx$, unde funcţia $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ este dată prin

$$f(x) = \min\left\{x, \frac{2}{1+x^2}\right\}.$$

Atunci:

(a) $I = \frac{1}{2} + 2 \arctan 2 - \frac{\pi}{2}$;
(b) $I = \frac{1}{2} + 2 \arctan 2 - \frac{\pi}{2}$;
(c) $I = 2$;
(d) $I = 2 \arctan 2$.

Soluţie. Fie funcţia $g : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - \frac{2}{1+x^2}$. Atunci $g'(x) = 1 + \frac{4x}{(1+x^2)^2} > 0$, pentru orice $x \in [0, 2]$, deci g este strict crescătoare. Cum $g(1) = 0$, avem $I = \int_0^1 x dx + \int_1^2 \frac{2}{1+x^2} dx$.
Răspuns corect: (a). $\square$

20. Fie punctul $A(4, 2)$ în plan. Punctele situate pe axa (Oy) la distanţă $d = 2\sqrt{5}$ de A sunt:

(a) $(-2\sqrt{5}, 0), (2\sqrt{5}, 0)$;
(b) $(0, -2\sqrt{5}), (0, 2\sqrt{5})$;
(c) $(0, 0), (0, 4)$;
(d) $(0, 0), (8, 0)$.

Soluţie. Deoarece punctele căutate se află pe (Oy), ele vor avea coordonatele de forma $(0, y)$. Impunând ca distanţa faţă de A să fie egală cu $2\sqrt{5}$, obţinem $16 + (y - 2)^2 = 20$.
Răspuns corect: (c). $\square$

21. Dacă în $\triangle ABC$ avem $m\left(\hat{B}\right) = \frac{\pi}{6}$ şi $m\left(\hat{C}\right) = \frac{\pi}{4}$ atunci:

(a) $|AB| = \sqrt{2}|AC|$;
(b) $\triangle ABC$ este isoscel;
(c) $|AC| = \frac{1}{2}|BC|$;
(d) $|BC| = \frac{1}{2}|AC|$.

Soluţie. Din teorema sinusurilor avem $\frac{|AC|}{\sin \hat{B}} = \frac{AB}{\sin \hat{C}}$.
Răspuns corect: (a). $\square$

22. Dreapta care trece prin punctele $A(-1, 1)$ şi $B\left(\frac{3}{2}, -1\right)$ are ecuaţia:

(a) $5x - 3y + 1 = 0$;
(b) $4x + 5y - 1 = 0$;
(c) $2x - \frac{3}{2}y + 1 = 0$;
(d) $2y + 7 = 0$.

Soluţie. Ecuaţia dreptei este $\frac{x+1}{\frac{3}{2}+1} = \frac{y-1}{-1-1}$.
Răspuns corect: (b). $\square$

23. Valorile parametrului real m pentru care vectorii $\bar{a} = m\bar{i} + 2\bar{j}$ şi $\bar{b} = \bar{i} + m\bar{j}$ sunt coliniari, sunt:

(a) $m \in \{-2, 2\}$;
(b) $m \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$;
(c) $m = 2$;
(d) $m = \sqrt{2}$.

Soluţie. Vectorii sunt coliniari dacă şi numai dacă au coordonatele proporţionale, adică $\frac{m}{1} = \frac{2}{m}$.

Răspuns corect: (b). □

24. Partea imaginară a numărului

$$E = 1 + i + i^2 + \cdots + i^{2022}$$

este egală cu:

(a) 1;
(b) 0;
(c) 2;
(d) -1.

Soluţie. Deoarece E este suma a 2023 de numere în progresie geometrică, cu raţia i, avem $E = \frac{1-i^{2023}}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} = i$.

Răspuns corect: (a). □

25. Numărul soluţiilor din intervalul $[0, \pi]$ ale ecuaţiei

$$\sin 2x = \cos^2 x$$

este:

(a) 1;
(b) 2;
(c) 3;
(d) o infinitate.

Soluţie. Ecuaţia se scrie $2\sin x \cos x = \cos^2 x$. O primă soluţie este $x = \frac{\pi}{2}$. Dacă $x \neq \frac{\pi}{2}$ avem $2\sin x = \cos x$ şi, din $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, obţinem $\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ sau $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$. În al doilea caz $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, deci doar două din cele trei soluţii posibile se află în intervalul $[0, \pi]$

Răspuns corect: (b). □