Universitatea Tehnică ”Gheorghe Asachi” din Iaşi
Facultatea de Automatică şi Calculatoare
Admitere sesiunea iulie 2022
Domeniile: Calculatoare şi tehnologia informaţiei
Ingineria sistemelor (Automatică şi informatică aplicată)

Model 8 test admitere AC - 2022 - Soluţii

Problema 1 *Soluţiile reale ale ecuaţiei* $3^{\frac{x-1}{2}} = 9^{\sqrt{x}}$ *sunt:*

(a) $9 \pm 4\sqrt{5}$

(b) $4 \pm \sqrt{5}$

(c) 1

(d) $-7 \pm \sqrt{5}$

Soluţie: 1 *Ecuaţia pe care dorim să o rezolvăm este:*

$$3^{\frac{x-1}{2}} = 9^{\sqrt{x}}$$

Din injectivitatea funcţiei exponenţiale avem:

$$\frac{x-1}{2} = 2\sqrt{x} \leftrightarrow x - 1 = 4\sqrt{x} \to x^2 - 2x + 1 = 16x$$

În cele ce urmează vom rezolva ecuaţia de gradul II

$$x^2 - 18x + 1 = 0$$

Discriminantul acesteia este $\Delta = 320$. *Obţinem cele două soluţii:*

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{18 + 8\sqrt{5}}{2} = 9 + 4\sqrt{5} \\ x_2 = \dfrac{18 - 8\sqrt{5}}{2} = 9 - 4\sqrt{5} \end{cases}$$

Răspunsul corect este (a).

Problema 2 *Considerăm ecuaţia* $x^2 - mx + m - 1 = 0$. *Valoarea întreagă a parametrului* m *pentru care una dintre rădacinile ecuaţiei este dublă celeilalte este:*

(a) $m = 1$

(b) $m = 3$

(c) $m = -3$

(d) $m = 6$

Soluţie: 2 *Vom identifica mai întâi soluţiile ecuaţiei şi vom purta discuţia în funcţie de parametrul* m. *Discriminantul ecuaţiei este* $\Delta = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2$. *Soluţiile ecuaţiei sunt:*

$$x_{1,2} = \frac{m \pm |m-2|}{2}$$

Distingem de aici cazurile:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{m + (m-2)}{2} \\ x_2 = \dfrac{m + (-m+2)}{2} \end{cases}$$

Avem de analizat soluţiile:

$$\begin{cases} x_1 = m-1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Dorim ca una dintre rădăcini să fie dublă celeilalte. Avem 2 situaţii:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 \to m = 3 \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 2x_1 \to m = \dfrac{3}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

Răspunsul corect este (b).

Problema 3 *Valorile reale pozitive ale parametrului m astfel încât $lg\sqrt{m}$, $\frac{3}{2}$, $lg\ m$ să fie trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice sunt:*

(a) 1

(b) 10

(c) 100

(d) 1000

Soluţie: 3 *Din proprietăţile unei progresii aritmetice cunoaştem că termenul de rang n este media aritmetică a termenilor echidistanti de el. Prin urmare ne dorim ca:*

$$\frac{3}{2} = \frac{lg\sqrt{m} + lg\ m}{2}.$$

Condiţia precedentă se rescrie sub forma:

$$\frac{3}{2} = \frac{3lg\ m}{4} \to lg\ m = 2 \to m = 100.$$

Răspunsul corect este (c).

Problema 4 *Valoarea parametrului a pentru care sistemul* $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + az = 0 \\ -2z - y + 3z = 0 \end{cases}$ *este compatibil unic determinat este*

(a) $a \neq 2$

(b) $a \neq 0$

(c) $a \neq 9$

(d) $a \neq -3$

Soluţie: 4 *Sistemul pe care dorim să îl analizăm este unul omogen. Este cunoscut faptul că un sistem omogen este compatibil unic determinat dacă şi numai dacă rangul matricei sistemului coincide cu numărul de necunoscute. Matricea sistemului este:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Fiind o matrice pătratică putem să calculăm determinantul acesteia şi să purtăm discuţia în funcţie de valoarea acestuia.

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - a.$$

Rangul matricei va fie egal cu 3 dacă determinantul este nenul, prin urmare rang $A = 3 \Leftrightarrow a \neq 9$.
Răspunsul corect este (c).

Problema 5 *Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie:*

$$x * y = xy - 3x - 3y + 12.$$

Valoarea expresiei:

$$E = \underbrace{x * x * \ldots * x}_{n\ ori} \text{ este:}$$

(a) $E = 3^n - 1$

(b) $E = (x-3)^n + 3$

(c) $E = 3x + 3^n$

(d) $E = (x+3)^n$

Soluţie: 5 *Vom determina mai întâi valoarea expresiei pentru cazuri particulare urmând să generalizăm pentru a obţine rezultatul final.*
Să analizăm mai întâi dacă legea de compoziţie este asociativă. Vom studia dacă:

$$x * (y * z) = (x * y) * z$$

$$x * (y * z) = x * (yz - 3y - 3z + 12) = xyz - 3xy - 3xz + 12x - 3x - 3yz + 9y + 9z - 36 + 12 \tag{1}$$

Analog:

$$(x * y) * z = (xy - 3x - 3y + 12) * z = xyz - 3xz - 3yz + 12z - 3xy + 9x + 9y - 36 - 3z + 12 \tag{2}$$

Se observă că legea de compoziţie este una asociativă.

- *pentru* $n = 2$ *avem* $E = x * x = x^2 - 6x + 12 = (x-3)^2 + 3$
- *pentru* $n = 3$ *avem* $E = x*x*x = (x*x)*x = ((x-3)^2+3)*x = x(x-3)^2+3x-3(x-3)^2-9-3x+12 = (x-3)^3+3.$

  Poate fi demonstrat prin induţie că

$$E = \underbrace{x * x * \ldots * x}_{n\ ori} = (x-3)^n + 3.$$

Etapa de verificare a fost parcursă anterior. Pentru etapa de inducţie vom presupune că $P(k)$ *este adevărată şi vom demonstra că* $P(k+1)$ *este adevărată.*

- *Presupunem că* $P(k)$ *este adevărată:*

$$\underbrace{x * x * \ldots * x}_{k\ ori} = (x-3)^k + 3$$

- *Dorim să demonstrăm că* $P(k+1)$ *este adevărată deci:*

$$\underbrace{x * x * \ldots * x}_{k+1\ ori} = (x-3)^{k+1} + 3.$$

Se observă că:

$$\underbrace{x * x * \ldots * x}_{k+1\ ori} = (x-3)^k + 3) * x = x(x-3)^k + 3x - 3(x-3)^k - 9 - 3x + 12 = (x-3)^{k+1} + 3 \tag{3}$$

S-a obţinut $P(k+1)$ *adevărată deci conform principiului induţiei matematice rezultă că* $P(n)$ *este adevărată.*
Răspunsul corect este (b).

Problema 6 *Valoarea parametrului* $m \in \mathbb{R}$ *astfel încât valoarea maximă a funcţiei* $f(x) = mx^2 - 8x - 3$ *să fie* 5 *este*

(a) $m = 2$

(b) $m = -2$

(c) $m = 1$

(d) $m = 5$

Soluţie: 6 *Începem prin a aminti faptul că dacă dorim să determinăm valoarea maximă a unei funcţii de gradul al II-lea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c$ *vom impune mai întâi condiţia ca* $a < 0$, *adică* $m < 0$. *Valoarea maximă a funcţiei este* $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$. *Avem*

$$-\frac{\Delta}{4a} = 5 \Leftrightarrow -64 - 12m = 20m \to m = -2 < 0$$

Răspunsul corect este (b).

Problema 7 *Se consideră funcţia* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x-e^{-x}$. *Atunci valoarea sumei* $S=g(1)+g(2)+\ldots g(2022)$ *unde* $g(x)=f'(x)-f^{''}(x)$ *este:*

(a) $2\dfrac{1-e^{2022}}{e^{2022}(1-e)}$

(b) $e^{2022}+e^{-2022}$

(c) e^{-2022}

(d) $2\dfrac{1-e^{2021}}{e^{2022}(1+e)}$

Soluţie: 7 *Dorim să identificăm mai întâi expresia funcţiei* g. *Pentru aceasta vom calcula mai întâi derivatele de ordinul* I *şi pe cele de ordinul* II *pentru funcţia* f *deoarece acestea apar în expresia funcţiei* g.

- $f'(x)=e^x+e^{-x}$
- $f^{''}(x)=e^x-e^{-x}$

Obţinem:

$$g(x)=f'(x)-f^{''}(x)=e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x}=2e^{-x}.$$

Suma de calculat este

$$S=2\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}+\ldots+\frac{1}{e^{2022}}\right)$$

Putem să privim expresia obţinută ca fiind suma unei progresii geometrice de raţie $\dfrac{1}{e}$.

$$S_{2022}=\frac{1}{e}\cdot\frac{\frac{1}{e^{2022}}-1}{\frac{1}{e}-1}=\frac{1}{e}\cdot\frac{1-e^{2022}}{e^{2022}}\cdot\frac{e}{1-e}=\frac{1-e^{2022}}{e^{2022}(1-e)}$$

Suma pe care noi dorim să o calculăm este:

$$S=2S_{2022}=2\frac{1-e^{2022}}{e^{2022}(1-e)}$$

Răspunsul corect este (a).

Problema 8 *Se consideră funcţia* $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}$. *Atunci abscisa punctului de pe graficul funcţiei* f *în care tangenta este paralelă cu dreapta* $d:y=\dfrac{2}{9}x$ *este:*

(a) $\dfrac{1}{4}$

(b) $\dfrac{1}{2}$

(c) 1

(d) $\dfrac{1}{9}$

Soluţie: 8 *Din punct de vedere geometric derivata unei funcţii într-un punct* x_0, *dacă aceasta există, reprezintă panta tangentei la graficul funcţiei în punctul* $(x_0,f(x_0))$.
În primă fază vom calcula derivata funcţiei propuse:

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{2(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}$$

Panta dreptei d *este* $m_d=\dfrac{2}{9}$. *Dorim să identificăm abscisa pentru care* $m_d=f'(x)$. *Obţinem ecuaţia:*

$$\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}=\frac{2}{9}\Leftrightarrow 2x^3-5x^2+20x-9=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-4x+18)=0\to x=\frac{1}{2}.$$

Răspunsul corect este (b).

Problema 9 *Se consideră funcţia* $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{x\ln x}$. *Atunci*

(a) f *este concavă pe* $(0,\infty)$.

(b) f *este convexă pe* $(0,\infty)$.

(c) f *este crescătoare pe* $(0,e]$

(d) f *are un punct critic în* $x=1$.

Soluţie: 9 *Pentru a vedea care dintre variantele prezentate este corectă avem nevoie de expresia derivatelor de ordinul I şi de ordinul al II-lea pentru funcţia propusă spre analiză. Derivata funcţiei este:*

$$f'(x)=(\ln x+1)e^{x\ln x}.$$

Observăm că $f'(x)<0,\ \forall x\in(0,e]$ *prin urmare* f *este descrescătoare pe* $(0,e]$.
Cum $f'(1)=1\to x=1$ *nu este punct critic. Calculăm şi*

$$f^{''}(x)=f(x)\left((1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right)>0.$$

Deoarece derivata de ordinul II *este pozitivă rezultă că funcţia este convexă pe* $(0,\infty)$.
Răspunsul corect este (b).

Problema 10 *Valoarea parametrilor reali a şi b astfel încât* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$ *este:*

(a) $a=b=1$

(b) $a=1,\ b=-\dfrac{1}{2}$

(c) $a=2,\ b=1$

(d) $a=\dfrac{1}{2},\ b=2$

Soluţie: 10 *Limita este infinită dacă* $a^2\neq 1$ *deoarece numărătorul ar avea gradul mai mare decât numitorul. Dacă* $a^2=1\to a=\pm1$.

- *Dacă* $a=1\Rightarrow L=\dfrac{1(1+2b)}{2}=0\leftrightarrow b=-\dfrac{1}{2}$
- *Dacă* $a=-1\Rightarrow L=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+x-b)=\infty$

Răspunsul corect este (b).

Problema 11 *Fie funcţia* $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x\ln x}{(1+x^2)^2}$. *Dacă* F *este o primitivă a funcţiei* F *astfel încât* $F(1)=0$ *atunci* $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$ *este:*

(a) $\ln 2$

(b) $\dfrac{\ln 2}{4}$

(c) $\dfrac{\ln 2}{5}$

(d) 0

Soluţie: 11 *Ne propunem să identificăm mai întâi primitiva funcţiei* f

$$F(x)=\int f(x)\ dx=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'\cdot ln\ xdx=-\frac{ln\ x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x(1+x^2)}dx$$

Pentru a calcula ultima integrală vom folosi descompunerea în fracţii simple după cum urmează

$$\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}\to 1=A(1+x^2)+(Cx+D)x\to\begin{cases}A+B=1\\C=0\\A=1\end{cases}\to\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=0\end{cases}$$

Revenim la calcularea primitivei:

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{ln\ x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{x}{1+x^2}dx = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{ln\ x}{2} - \frac{1}{4}ln(1+x^2) + \mathcal{C} \\ &= \frac{1}{2}\frac{x^2 \ln x}{1+x^2} - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + \mathcal{C}. \end{aligned} \tag{4}$$

Din $F(1) = 0 \to \mathcal{C} = \dfrac{\ln 2}{4}$.

Pentru a finaliza trebuie să calculăm:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{x^2\ln x}{1+x^2} - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + \frac{\ln 2}{4}\right) \tag{5}$$

Vom calcula mai întâi:

$$l = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{x^2\ln x}{1+x^2} - \frac{1}{4}\ln(1+x^2)\right) \tag{6}$$

Vorbim despre o nedeterminare de tipul $\infty - \infty$. *Pentru a găsi valoarea limitei vom împărţi numărătorul şi numitorul la* x^2.

$$l = \frac{1}{4}\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x - \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} - \ln(x^2+1)}{1+\frac{1}{x^2}} \tag{7}$$

Avem că

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ln(1+x^2)}{x^2} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x(1+x^2)} = 0$$

Analog $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2} = 0$. *Limita de calculat devine:*

$$l = \frac{1}{4}\lim_{x\to\infty}(2\ln x - \ln(x^2+1)) = \frac{1}{4}\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^2}{x^2+1} = 0.$$

Revenim la limita iniţială şi obţinem:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \frac{\ln 2}{4}$$

Răspunsul corect este (b).

Problema 12 *Valoarea expresiei* $S = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \ldots + \sin^2 90^\circ$ *este*

(a) $\dfrac{91}{2}$

(b) $\dfrac{1}{2}$

(c) $\dfrac{1}{4}$

(d) $\dfrac{90}{2}$

Soluţie: 12 *Vom folosi formula* $\sin x = \cos(90^\circ - x)$. *Expresia de calculat se rescrie sub forma:*

$$S = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \ldots + \sin^2 90^\circ = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \ldots + \sin^2 45^\circ + \cos^2 44^\circ + \ldots + \cos^2 1^\circ + \cos^2 0^\circ.$$

În cele ce urmează vom face apel la identitatea fundamentală:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Expresia propusă se rescrie astfel:

$$S = (\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + \ldots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) + \sin^2 45^\circ + \cos^2 0^\circ = 45 + \frac{1}{2} = \frac{91}{2}$$

Răspunsul corect este (a).

Problema 13 *Valoarea parametrului real a pentru care vectorii* $\vec{u} = 2\vec{i} + a\vec{j}$ *şi* $\vec{v} = 3\vec{i} + (a-2)\vec{j}$ *sunt coliniari este:*

(a) $a = 5$

(b) $a = 4$

(c) $a = -4$

(d) $a = 3$

Soluţie: 13 *Cei doi vectori vor fi coliniari dacă coordonatele lor vor fi proportionale. Prin urmare avem*

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{a}{a-2} \to 3a = 2a - 4 \Rightarrow a = -4.$$

Răspunsul corect este (c).

Problema 14 *Considerăm triunghiul dreptunghic ABC cu $AB = 3$ şi măsura unghiului C de $\frac{\pi}{6}$. Care este lungimea laturii AC ştiind că $(m(\widehat{BAC}) = 90^\circ)$?*

(a) 3

(b) $5\sqrt{3}$

(c) 2

(d) $3\sqrt{3}$

Soluţie: 14 *Vom utiliza teorema unghiului de 30° care afirmă că într-un triunghi dreptunghic cateta opusă unghiului de 30° este jumătate din ipotenuză. În cazul de faţă triunghiul este dreptunghic în A atunci ipotenuza are lungimea de 6 unităţi. Folosim teorema lui Pitagora şi obţinem $AC = 3\sqrt{3}$.*
Răspunsul corect este (d).

Problema 15 *Considerăm triunghiul echilateral $M_1M_2M_3$ cu $M_1(1,0)$ şi $M_2(2,1)$. Atunci coordonatele vârfului rămas sunt:*

(a) $\left(\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}, \frac{1 \mp \sqrt{3}}{2}\right)$

(b) $\left(\frac{3 \mp \sqrt{3}}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}\right)$

(c) $(1,2)$

(d) $(\sqrt{3},1)$

Soluţie: 15 *Vom nota coordonatele vârfului rămas cu $M_3(x,y)$.*
Dorim să identificăm coordonatele vârfului M_3 astfel încât triunghiul $M_1M_2M_3$ să fie un triunghi echilateral. Este cunoscut faptul că într-un triunghi echilaterat lungimile celor trei laturi sunt egale. Vom avea:

$$\begin{cases} M_1M_2 = \sqrt{(x_{M_2} - x_{M_1})^2 + (y_{M_2} - y_{M_1})^2} = \sqrt{2} \\ M_1M_3 = \sqrt{(x_{M_3} - x_{M_1})^2 + (y_{M_3} - y_{M_1})^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ M_2M_3 = \sqrt{(x_{M_3} - x_{M_2})^2 + (y_{M_3} - y_{M_2})^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} \end{cases}$$

Vom avea de rezolvat sistemul:

$$\begin{cases} \sqrt{2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

Vom înlocui pe y din a doua ecuaţie în prima ecuaţie şi vom obţine:

$$\begin{cases} y = 2 - x \\ x^2 - 2x + 4 - 4x + x^2 - 1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y = 2 - x \\ 2x^2 - 6x + 3 = 0 \end{cases}$$

Discriminantul ecuaţiei de gradul II în x este $\Delta = 36 - 24 = 12$. Obţinem:

$$\begin{cases} x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} \\ y_{1,2} = 2 - x = 2 - \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} = \frac{1 \mp \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Răspunsul corect este (a).

Problema 16 *Raportul dintre raza cercului înscris şi raza cercului circumscris unui pătrat este*

(a) $\frac{1}{2}$

(b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(c) $\frac{1}{4}$

(d) 2

Soluţie: 16 *Considerăm pătratul de latura a. Atunci raza cercului înscris este jumătate din lungimea laturii pătratului, adică $\frac{a}{2}$. Raza cercului circumscris este jumătate din diagonala pătratului $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Obţinem raportul $\frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.*
Răspunsul corect este (b).

Problema 17 *Valoarea parametrului m pentru care sistemul neomogen de mai jos este incompatibil este:*

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 1 \\ 3x + 5y - 5z = m \end{cases}$$

(a) $m = 4$

(b) $m \in \mathbb{R}$

(c) $m \in \mathbb{R} - \{4\}$

(d) sistemul este compatibil pentru orice m.

Soluţie: 17 *Un sistem neomogen este incompatibil atunci când rangul matricei extinse este mai mare decât rangul matricei sistemului. În cazul de faţă:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}, \ det\ A = 0$$

Avem:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to rang\ A = 2.$$

$$\Delta_{car} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 4.$$

Observăm că rangul matricei sistemului este 2, iar pentru $m \neq 4$ rangul matricei extinse este 3.
Răspunsul corect este (c).

Problema 18 *Punctele $(0,1)$ şi $(3,5)$ sunt două vârfuri ale unui triunghi de arie 5 iar dreapta $3x + 4y = 0$ este una dintre înălţimi. Coordonatele celui de-al treilea vârf din semiplanul sunt:*

(a) $(1,1)$

(b) $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

(c) $(0,0)$

(d) $\left(\frac{28}{25}, -\frac{21}{25}\right)$

Soluţie: 18 ***Varianta 1:*** *Dacă $P(a,b)$ este cel d-al treilea vârf avem:*

$$P \in (d) \Leftrightarrow 3a + 4b = 0.$$

Mai mult:

$$\mathcal{A}_\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = \pm 5 \Leftrightarrow 3a - 4b = \pm 5$$

Avem de analizat următoarele sisteme:

$$\begin{cases} 3a+4b=0 \\ -4a+3b=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{32}{25} \\ b=-\dfrac{24}{25} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a+4b-0 \\ -4a+3b=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{28}{25} \\ b=-\dfrac{21}{25} \end{cases}$$

Deoarece dorim un vârf din semiplanul drept vom alege $P\left(\dfrac{28}{25}, -\dfrac{24}{25}\right)$.

Varianta 2: *Vom identifica mai întâi lungimea înălţimii. Să observăm că niciunul dintre cele două vârfuri nu aparţine înălţimii descrise în enunţ. Să calculăm lungimea bazei adică distanţa dintre cele doua puncte:*

$$b=\sqrt{9+16}=5 \to h=2$$

Mai mult ecuaţia bazei este:

$$b_t : \frac{x}{3}=\frac{y-1}{4} \to 4x-3y+3=0$$

Considerăm $P(a,b)$ *coordonatele vârfului căutat.*

Ecuaţia parametrică a înălţimii este $\begin{cases} x=t \\ y=-\dfrac{3t}{4} \end{cases}$. *Punctul* P *aparţine înălţimii deci verifică ecuaţia acesteia:* $P\left(t, -\dfrac{3t}{4}\right)$

Avem:

$$d(P,b)=\frac{|4a-3b+3|}{5}=\frac{\left|4t+\dfrac{9t}{4}+3\right|}{5}$$

Ştim că această distanţă este de 2 unităţi. Obţinem relaţia:

$$\frac{25t+12}{4}=\pm 10 \to 25t+12=\pm 40 \to t=\frac{-12\pm 40}{25}.$$

Vom alege varianta care ne conduce către $x_p \geq 0 \to \begin{cases} a=\dfrac{28}{25} \\ b=-\dfrac{21}{25} \end{cases}$.

Răspunsul corect este (d).

Problema 19 *Soluţiile sistemului de ecuaţii* $\begin{cases} (a-b)\sin(x+y)+(a+b)sin(x-y)=0 \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = ab \end{cases}$ *sunt* :

(a) $\begin{cases} x=k\pi \pm \operatorname{arctg}\ a \\ y=k\pi \pm \operatorname{arctg}\ b \end{cases}$

(b) $x=y=\dfrac{\pi}{2}$

(c) $\begin{cases} x=k\pi + \arcsin a \\ y=k\pi + \arcsin b \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4} \\ y=k\pi \end{cases}$

Soluţie: 19 *Sistemul se rescrie sub forma:*

$$\begin{cases} a\sin x\cos y+a\cos x\sin y-b\sin x\cos y-b\cos x\sin y+a\sin x\cos y+b\sin x\cos y-a\cos x\sin y-b\cos x\sin y=0 \\ \operatorname{tg} x\cdot \operatorname{tg} y=ab \end{cases}$$

sau:

$$\begin{cases} a\operatorname{tg} y-b\operatorname{tg} x=0 \\ \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y=ab \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x=\dfrac{ab}{\operatorname{tg} y} \\ \operatorname{tg}^2 y=b^2 \end{cases} \to \begin{cases} \operatorname{tg} x=\pm a \\ \operatorname{tg} y=\pm b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=k\pi\pm\operatorname{arctg}\ a \\ y=k\pi\pm\operatorname{arctg}\ b \end{cases}$$

Răspunsul corect este (a).

Problema 20 *Soluţia ecuaţiei* $\frac{x}{4} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx = 0$ *este:*

(a) $x = 0$

(b) $x = -2(e^{2\pi} + 1)$

(c) $x = \sqrt{2}$

(d) $x = -\pi$

Soluţie: 20 *Vom calcula mai întâi valoarea integralei*

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx = arctg(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \tag{8}$$

Ecuaţia de rezolvat devine:

$$\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4} = 0 \Rightarrow x = -\pi.$$

Răspunsul corect este (d).

Problema 21 *Considerăm* $X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$. *Valoarea parametrului a astfel încât X să fie soluţie comună a ecuaţiilor matriceale*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \text{ şi } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \text{ este:}$$

(a) $\frac{3}{10}$

(b) $-\frac{2}{10}$

(c) $\frac{1}{10}$

(d) $\frac{7}{10}$

Soluţie: 21 *Vom determina pe rând soluţiile celor două ecuaţii matriceale*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 2a & 3a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow 10a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{10} \tag{9}$$

Analog:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3a & 2a & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow 10a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{10} \tag{10}$$

Răspunsul corect este (b).

Problema 22 *Dacă* a, b, c *reprezintă lungimile laturilor unui triunghi iar* h_a, h_b, h_c *înălţimile corespunzătoare atunci valoarea determinantului* $D = \begin{vmatrix} 1 & a & h_b \cdot h_c \\ 1 & b & h_a \cdot h_c \\ 1 & c & h_a \cdot h_b \end{vmatrix}$ *este:*

(a) $D = abc$

(b) $D = 0$

(c) $D = a^2 + b^2 + c^2$

(d) $D = \frac{1}{2}(ab + bc + ca)$

Soluţie: 22

$$\mathcal{A} = \frac{b \cdot h}{2}.$$

În cazul de faţă vom avea următoarele relaţii:

$$\mathcal{A} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} \to \begin{cases} h_a = \frac{2\mathcal{A}}{a} \\ h_b = \frac{2\mathcal{A}}{b} \\ h_c = \frac{2\mathcal{A}}{c} \end{cases}$$

Determinantul se rescrie sub forma:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & h_b \cdot h_c \\ 1 & b & h_a \cdot h_c \\ 1 & c & h_a \cdot h_b \end{vmatrix} = 4\mathcal{A}^2 \begin{vmatrix} 1 & a & \frac{1}{bc} \\ 1 & b & \frac{1}{ac} \\ 1 & c & \frac{1}{ab} \end{vmatrix} = \frac{4\mathcal{A}^2}{abc} \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & b & b \\ 1 & c & c \end{vmatrix} = 0 \tag{11}$$

Răspunsul corect este (b).

Problema 23 *Valoarea sumei*

$$S = \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) \text{ este}$$

(a) $S = 0$

(b) $S = 1$

(c) $S = -\frac{1}{2}$

(d) $S = \frac{1}{4}$

Soluţie: 23 *Vom porni de la relaţiile:*

$$2\sin\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1} = \sin\frac{3\pi}{2n+1} - \sin\frac{\pi}{2n+1}$$
$$2\sin\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{4\pi}{2n+1} = \sin\frac{5\pi}{2n+1} - \sin\frac{3\pi}{2n+1}$$
$$\cdots$$
$$2\sin\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2n\pi}{2n+1} = \sin\pi - \sin\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}$$

Deoarece $\sin\pi = 0$ *adunând relaţiile scrise anterior vom obţine:*

$$2\sin\frac{\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) = -\sin\frac{\pi}{2n+1}$$

Răspunsul corect este (c).

Problema 24 *Dacă numărul complex* $z \in \mathbb{C}$ *verifică* $z^2 + z + 1 = 0$ *atunci valoarea expresiei* $z^4 + \frac{1}{z^4}$ *este:*

(a) 1

(b) i

(c) $-i$

(d) -1

Soluţie: 24 *Obţinem* $z^3 = 1 \rightarrow z^4 = z$ *deci* $z + \dfrac{1}{z} = \dfrac{z^2+1}{z} = -1$. *Răspunsul corect este* (d).

Problema 25 *Se consideră dezvoltarea* $\left(\dfrac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}} + \dfrac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. *Pentru* $n = 8$ *care sunt valorile lui* x *pentru care diferenţa dintre termenii al şaselea şi al patrulea ai dezvoltării să fie* 56*?*

(a) $x = 0$

(b) $x = -1$

(c) $x = \sqrt{2}$

(d) $x = 4$

Soluţie: 25 *Rescriem condiţia* $T_6 - T_4 = 56$.
Avem:

$$C_8^5\left(\frac{2^{\frac{x}{2}}}{2^{\frac{3}{16}}}\right)^{8-5}\cdot\left(\frac{2^{\frac{5}{16}}}{2^{\frac{x}{2}}}\right)^5 - C_8^3\left(\frac{2^{\frac{x}{2}}}{2^{\frac{3}{16}}}\right)^{8-3}\cdot\left(\frac{2^{\frac{5}{16}}}{2^{\frac{x}{2}}}\right)^3 = 56 \Leftrightarrow \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2}2^{\frac{3x}{2}-\frac{9}{16}+\frac{25}{16}-\frac{5x}{2}} - \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2}2^{\frac{5x}{2}-\frac{15}{16}+\frac{15}{16}-\frac{3x}{2}} = 56 \quad (12)$$

Din relaţia predecedentă obţinem:

$$2^{1-x} - 2^x = 1 \rightarrow \frac{2}{2^x} - 2^x = 1 \rightarrow 2^{2x} + 2^x - 2 = 0 \rightarrow 2^x = 1 \text{ sau } 2^x = -1$$

Vom alege $2^x = 1$.
Răspunsul corect este (a).