Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iaşi
Facultatea de Automatică şi Calculatoare
Admitere sesiunea iulie 2022
Domeniile: Calculatoare şi tehnologia informaţiei
Ingineria sistemelor (Automatică şi informatică aplicată)

Model 9 test admitere AC - 2022 - Soluţii

Problema 1 *Produsul soluţiilor ecuaţiei* $\sqrt{1-x}+\sqrt{x}=1$ *este:*

(a) 0

(b) 2

(c) -1

(d) 1

Soluţie: Condiţiile de existenţă pentru cei doi radicali sunt:

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \rightarrow x \in [0,1].$$

Izolăm un radical şi obţinem $\sqrt{1-x}=1-\sqrt{x}$. Prin ridicarea la pătrat a relaţiei precedente obţinem:

$$1-x=1-2\sqrt{x}+x \rightarrow 2\sqrt{x}=2x \rightarrow \sqrt{x}=x.$$

Ridicăm încă o dată la pătrat şi obţinem:

$$x^2-x=0 \rightarrow x(x-1)=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=1 \end{cases}$$

Observăm că $\{0,1\} \subset [0,1]$ prin urmare ambele soluţii convin, produsul acestora fiind 0.
Răspunsul corect este (a).

Problema 2 *Dacă* $a,\ b,\ c$ *sunt determinate astfel încât să aibă loc egalitatea* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int\limits_0^x (a+b\cos 2t+c\sin t)\,dt=\frac{1}{3}$ *atunci* $S=|a|+|b|+|c|$ *este egală cu:*

(a) 4

(b) 1

(c) 3

(d) 2

Soluţie: Vom calcula mai întâi valoarea integralei:

$$I(x)=\int\limits_0^x (a+b\cos 2t+c\sin t)\,dt = at\Big|_0^x + b\frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^x - c\cos t\Big|_0^x = ax+b\frac{\sin 2x}{2}-c\cos x+c \tag{1}$$

Vom trece acum la calcularea limitei:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int\limits_0^x (a+b\cos 2t+c\sin t)\,dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(ax+b\frac{\sin 2x}{2}-c\cos x+c\right) \tag{2}$$

Observăm că pentru $x\to 0$ vom obţine cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$, prin urmare vom calcula limita folosind regula lui l'Hospital:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3x^2}\left(a+b\cos 2x+c\sin x\right) \tag{3}$$

Acum dacă $a + b \neq 0$ am obţine că $L = \infty$ contradicţie cu cerinţa problemei. Prin urmare vom considera $a + b = 0$ şi vom aplica din nou regula lui l'Hospital.

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{1}{6x} (-b \sin 2x + c \cos x) \tag{4}$$

Dorim ca limita să fie una finită deci vom impune condiţia ca $c = 0$. Limita de calculat devine:

$$L = \lim_{x\to 0} \left(\frac{-b \sin 2x}{6x} \right) = -\frac{b}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = -\frac{b}{3} \tag{5}$$

Avem acum de rezolvat ecuaţia:

$$-\frac{b}{3} = \frac{1}{3} \to b = -1$$

Revenim la condiţiile impuse pe parcusul rezolvării pentru a determina parametrii rămaşi:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \to \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases}$$

Atunci:

$$S = |a| + |b| + |c| = 1 + 1 + 0 = 2.$$

Răspunsul corect este (d).

Problema 3 *Mulţimea valorilor lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $ln(1 + 2x) - x^2 = a$ are o singură soluţie strict negativă este:*

(a) $(-\infty, 0)$

(b) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

(c) $(1, e + 1)$

(d) $(-\infty, 1)$

Soluţie: Din condiţiile de existenţă pentru logaritm obţinem $1 + 2x > 0 \to 2x > -1 \to x \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Studiem acum funcţia $f(x) = ln(1 + 2x) - x^2,\ f : \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \to \mathbb{R}$.
Avem:

$$f'(x) = \frac{2}{1 + 2x} - 2x = \frac{-2(2x^2 + x - 1)}{1 + 2x}.$$

Se observă că $f'(x) = 0 \leftrightarrow 2x^2 + x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Din cele două soluţii scrise anterior cea care convine este $\frac{1}{2} \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$. Dorim să întocmim tabelul de variaţie pentru funcţia f. Pentru aceasta avem:

- $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2 - \frac{1}{4}$ şi $f(0) = 0$
- $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to -\frac{1}{2}} ln(1 + 2x) - x^2 = -\infty - \frac{1}{4} = -\infty$
- $L = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 \left(\frac{\ln(1 + 2x)}{x^2} - 1 \right)$

Mai întâi observăm că:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1 + 2x)}{x^2} \overset{l'H}{=} \frac{2}{2x(1 + 2x)} = 0.$$

Revenim la limita precedentă şi obţinem:

$$L = \infty \cdot (-1) = -\infty$$

x	—	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		∞
$f(x)$	—	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\ln 2 - \frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$
$f'(x)$	—	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$

Se observă că $\ln 2 - \dfrac{1}{4} > 0$ (inegalitatea revine, în urma exponenţierii la 16 ¿ e, adevărat), deci punctul de maxim al funcţiei f se află deasupra axei Ox. Folosind graficul funcţiei f, examinăm ecuaţia $f(x) = a$. Distingem următoarele cazuri:

(i) pentru $a > \ln 2 - \dfrac{1}{4}$, dreapta $y = a$ nu intersectează graficul funcţiei f deci a nu întruneşte condiţia impusă de definiţia mulţimii M;

(ii) pentru $a = \ln 2 - \dfrac{1}{4}$, dreapta intersectează graficul într-un punct dublu de abscisă nenegativă $x_1 = x_2 = \dfrac{1}{2}$, deci $a \notin M$;

(iii) pentru $a \in \left(0, \ln 2 - \dfrac{1}{4}\right)$ dreapta intersectează graficul în două puncte de abscise strict pozitive $x_{1,2} > 0$, deci $a \notin M$;

(iv) pentru $a = 0$, dreapta intersectează graficul în două puncte de abscise $x_1 = 0$ respectiv $x_2 > 0$, deci $a \notin M$;

(v) pentru $a < 0$, dreapta intersectează graficul în două puncte de abscise $x_1 \in \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$, respectiv $x_2 > 0$, deci $a \in M$, singurul caz favorabil.

În concluzie, $M = (-\infty, 0)$. Răspunsul corect este (a).

Problema 4 *Valoarea parametrului $a \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul* $\begin{cases} ax - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$ *să aibă şi soluţii nenule este:*

(a) $a = -1$

(b) $a = 4$

(c) $a = -2$

(d) $a = 0$

Soluţie: Sistemul este omogen şi admite şi soluţii nebanale dacă şi numai dacă rangul matricei coeficienţilor necunoscutelor este mai mic decât numărul de necunoscute. În cazul nostru, această condiţie revine la anularea determinantului matricei coeficienţilor necunoscutelor. Avem:

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Fiind vorba despre o matrice pătratică putem să calculăm valoarea determinantului ataşat pentru ca ulterior să purtăm discuţia legată de rang în funcţie de valoarea obţinută. Avem $det\ A = 3a + 6$. Obţinem $rang\ A = 2$ pentru $a = -2$. Răspunsul corect este (c).

Problema 5 *Valoarea numărului $x \in \mathbb{R}$ astfel încât numerele x, 8, $3x+2$ să fie (în această ordine) în progresie aritmetică este:*

(a) $\dfrac{7}{2}$

(b) 2

(c) 1

(d) $\dfrac{5}{2}$

Soluţie: Pentru ca cele trei numere să fie în progresie artimetică al doilea număr trebuie să reprezinte media aritmetică a celorlalte două. Avem:

$$8 = \frac{x + 3x + 2}{2} \to 4x + 2 = 16 \to x = \frac{7}{2}.$$

Răspunsul corect este (a).

Problema 6 *Fie M mulţimea valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care dreptele de ecuaţii $d_1 : mx + y = 2$ şi $d_2 : x + my = 1$ sunt paralele. Atunci:*

(a) $M = \{-1, 1\}$

(b) $M = \emptyset$

(c) $M = \{1, 2\}$

(d) $M = \{-1, 2\}$

Soluţie: Condiţia de paralelism revine la $\frac{m}{1} = \frac{1}{m} \neq \frac{2}{1}$. Obţinem deci $m \pm 1$, iar $M = \{-1, 1\}$.
Răspunsul corect este (a).

Problema 7 *Rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & a & -5 \\ b & 3 & -1 \end{pmatrix}$ este 1 pentru:*

(a) $a = 15,\ b = \frac{2}{5}$

(b) $a = 3,\ b = 1$

(c) $a = 5,\ b = 1$

(d) $a = -15,\ b = -2.$

Soluţie: Rangul unei matrice reprezintă ordinul celui mai mare minor nenul al matricei propuse. În cazul exerciţiului de faţă rangul va fi 1 dacă toţi minorii de ordinul 2 vor fi nuli. Avem de analizat:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & a \\ b & 3 \end{vmatrix} = 6 - ab$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ b & -1 \end{vmatrix} = -2 + 5b$$

Avem de rezolvat sistemul:

$$\begin{cases} 6 - ab = 0 \\ -2 + 5b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 15 \\ b = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Răspunsul corect este (a).

Problema 8 *Valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u} = (2m+1)\vec{i} + 3\vec{j}$ şi $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$ sunt ortogonali este:*

(a) $m = -1$

(b) $m = 0$

(c) $m = 1$

(d) $m = 2$

Soluţie: Condiţia de ortogonalitate se scrie cu ajutorul produsului scalar. Avem $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. Pe de altă parte folosind definiţia produsului scalar avem $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -2m - 1 + 3 = -2m + 2$. Observăm că produsul scalar va fi nul pentru $m = 1$.
Răspunsul corect este (c).

Problema 9 *Se consideră triunghiul ABC de vârfuri $A(0,2), B(2,0)$ şi $C(4,0)$. Centrul cercului circumscris triunghiului ABC are coordonatele*

(a) $(0, 0)$

(b) $(3, 3)$

(c) $(2, 1)$

(d) $(2, 3)$

Soluţie: Amintim faptul că centrul cercului circumscris unui triunghi se află la intersecţia mediatoarelor. Mediatoarea era perpendiculara dusă prin mujlocul laturii. Mijlocul segmentului AB este $M(1,1)$, panta dreptei AB este $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -1$, deci mediatoarea segmentului AB (perpendicularea pe AB care trece prin M) are ecuaţia $m_1 : y - y_M = \frac{-1}{m}(x - x_M) \to y = x$. Mijlocul segmentului BC este $N(3,0)$, deci mediatoarea segmentului BC (perpendicularea pe BC care trece prin N) are ecuaţia $m_2 : x = 3$. Centrul căutat se află la intersecţia celor două mediatoare, deci este soluţie a sistemului:

$$\begin{cases} y = x \\ x = 3 \end{cases} \to \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

Răspunsul corect este (b).

Problema 10 *Valoarea expresiei* $E = \lg^3 5 + \lg^3 20 + \lg 8 \cdot \lg 0,25$ *este:*

(a) 2

(b) -1

(c) 5

(d) 4

Soluţie: Pentru a determina valoarea expresiei vom folosi următoarele notaţii:

$$a = \lg 5,\ b = \lg 2 \to a + b = 1.$$

Rescriem acum cantităţile care apar în expresie în funcţie de a şi b:

$$\begin{cases} \lg^3 5 = a^3 \\ \lg^3 20 = (a + 2b)^3 \\ \lg 8 = 3b \\ \lg 0,25 = \lg \frac{1}{4} = -2b \end{cases}$$

Expresia de calculat devine:

$$\begin{aligned} E &= a^3 + (a + 2b)^3 + 3b \cdot (-2b) = (a + a + 2b) \cdot (a^2 - a(a + 2b) + (a + 2b)^2) - 6b^2 \\ &= [2(a + b)] \cdot [(a + b)^2 + 3b^2] - 6b^2 = 2(1 + 3b^2) - 6b^2 = 2 \end{aligned}$$

Răspunsul corect este (a).

Problema 11 *Lungimea catetei unui triunghi dreptunghic isoscel de arie* 18 *este:*

(a) 4

(b) 9

(c) 3

(d) 6

Soluţie: Notând cu c lungimea celor două catete egale ale unui triunghi dreptunghic isoscel şi cu $\mathcal{A}$ aria acestuia, are loc relaţia:

$$\mathcal{A} = \frac{c^2}{2}$$

Înlocuind aria dată, obţinem $18 = \frac{c^2}{2} \to c = 6$.
Răspunsul corect este (d).

Problema 12 *Unghiurile* $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ *ale triunghiului* ABC *satisfac condiţia*

$$ctg\ A + ctg\ B = 2ctg\ C.$$

Care este relaţia verificată de laturile a, b, c *ale triunghiului* ABC*?*

(a) $a^2 + b^2 = c^2$

(b) $a^2 - b^2 = 2c^2$

(c) $a^2 + b^2 = 2c^2$

(d) $a^2 \cdot b^2 = 2c^2$

Soluţie: Rescriem mai întâi relaţia din enunţ folosind definiţia pentru funcţia trigonometrică cotangentă:

$$\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B} = 2\frac{\cos C}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{\cos A \sin B + \cos B \sin A}{\sin a \sin B} = 2\frac{\cos C}{\sin C}$$

Vom rescrie acum numărătorul expresiei din primul membru folosind formula pentru sinusul sumei:

$$\cos A \sin B + \cos B \sin A = \sin(A + B) \overset{A+B+C=\pi}{=} \sin(\pi - C) = \sin C$$

În baza celor scrise anterior condiţia din ipoteză devine:

$$\frac{\sin C}{\sin A \cdot \sin B} = \frac{2\cos C}{\sin C}$$

În relaţia precedentă aplicăm teorema cosinusului pentru unghiul C şi teorema sinusului pentru toate unghiurile.

$$\frac{\frac{c}{2R}}{\frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R}} = 2\frac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{\frac{c}{2R}} \Rightarrow 2c^2 = a^2 + b^2.$$

Răspunsul corect este (c).

Problema 13 *Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y = xy+2ax+by$. Relaţia dintre a şi b care asigură comutativitatea legii de compoziţie este:*

(a) $a - b = 2$

(b) $a = \dfrac{b}{2}$

(c) *nu există*

(d) $a = b$

Soluţie: Legea de compoziţie este comutativă dacă $x * y = y * x,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Obţinem:

$$xy + 2ax + by = yx + 2ay + bx \Leftrightarrow (2a - b)(x - y) = 0 \Rightarrow a = \frac{b}{2}.$$

Răspunsul corect este (b).

Problema 14 *Suma soluţiilor ecuaţiei* $\begin{vmatrix} 2 & x & 0 \\ x & -1 & x \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0$ *este:*

(a) 5

(b) 2

(c) 6

(d) -1

Soluţie: Vom determina mai întâi valoarea determinantului pentru a putea identifica soluţiile ecuaţiei propuse. Se obţine:

$$\begin{vmatrix} 2 & x & 0 \\ x & -1 & x \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{5-3}{2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{5+3}{2} = 4 \end{cases}$$

Suma soluţiilor este $x_1 + x_2 = 5$.
Răspunsul corect este (a).

Problema 15 *Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = z^2 + z + 1$. Atunci $f\left(\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$ este:*

(a) i

(b) 0

(c) $3i$

(d) $-2i$

Soluţie: Pentru început observăm că $(2z+1)^2 = \left(i\sqrt{3}\right)^2 = -3 \Leftrightarrow 4z^2 + 4z + 1 = -3 \leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0$.
Răspunsul corect este (b).

Problema 16 *Suma numerelor naturale mai mari sau egale cu 2 care satisfac inegalitatea* $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \cdot C_n^2 < 8$ *este:*

(a) 6

(b) 25

(c) 9

(d) 8

Soluţie: Existenţa fracţiei din enunţ duce la condiţia $n > 0$, care împreună cu condiţia din enunţ implică $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$.
Inecuaţia se rescrie sub forma:

$$\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} < 8 \Leftrightarrow n^2 - 17 < 0 \rightarrow n \in (-\sqrt{17}, \sqrt{17}).$$

Prin urmare

$$n \in (-\sqrt{17}, \sqrt{17}) \cap \{2, 3, 4, 5, \ldots\} = \{2, 3, 4\}.$$

Soluţia căutată este $2 + 3 + 4 = 9$.
Răspunsul corect este (c).

Problema 17 *Cea mai mică valoarea posibilă a integralei* $\int_{-1}^{1} (x^2 - ax + b)^2 dx$ *pentru* $a, b \in \mathbb{R}$ *este:*

(a) 0

(b) $\dfrac{8}{45}$

(c) $\dfrac{4}{45}$

(d) 1

Soluţie: Vom calcula mai întâi valoarea integralei:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (x^2 - ax + b)^2 dx &= \int_{-1}^{1} \left(x^4 + a^2x^2 + b^2x^2 - 2bx^3 - 2ax^2 + 2abx\right) dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{a^2x^3}{3} + \frac{b^2x^3}{3} - 2b\frac{x^4}{4} - 2a\frac{x^3}{3} + 2ab\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} \\ &= 2a^2 - \frac{4a}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2b^2}{3} = 2\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2b^2}{3} + \frac{8}{45} \geq \frac{8}{45}. \end{aligned} \tag{6}$$

Răspunsul corect este (b).

Problema 18 *Pentru ce valori ale lui* m *matricea* $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{pmatrix}$ *admite inversă?*

(a) $m \neq 0$

(b) $m \neq \pm 1$

(c) $m \neq \pm 2$

(d) $m \neq \pm 4$

Soluţie: Matricea A admite inversă dacă determinantul său este nenul. Avem:

$$det\ M = 4 - m^2 \to det\ M \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2.$$

Răspunsul corect este (c).

Problema 19 *Media aritmetică a punctelor critice ale funcţiei* $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ *este:*

(a) -1

(b) 1

(c) 2

(d) 0

Soluţie: Punctele critice sunt soluţiile ecuaţiei $f'(x) = 0$. Cal culăm mai întâi derivata funcţiei:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

Din $f'(x) = 0$ obţinem $x = \pm 1$. Media aritmetică este 0.
Răspunsul corect este (d).

Problema 20 *Valoarea întreagă a numărului* x *astfel încât al treilea termen al dezvoltării* $(x + x^{lg\ x})^5$ *să fie* 10^6 *este*

(a) $x = 10$

(b) $x = 6$

(c) $x = 100$

(d) $x = 8$

Soluţie: Avem $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k,\ a = x,\ b = x^{\lg x}$. Impunem condiţia ca

$$T_3 = C_5^2 x^3 (x^{lg\ x})^2 = 10 \cdot x^{3+2lg\ x} = 10^6 \to x^{3+2lg\ x} = 10^5$$

Din relaţia anterioară obţinem:

$$(3 + 2lg\ x)lg\ x = 5$$

Avem de rezolvat ecuaţia de gradul al II-lea în $\lg x$:

$$2lg^2 x + 3lg\ x - 5 = 0$$

Obţinem soluţiile:

$$\begin{cases} lg\ x = -\dfrac{5}{2} \\ lg\ x = 1 \end{cases}$$

Prima soluţie nu convine, prin urmare $x = 10$.
Răspunsul corect este (a).

Problema 21 *Fie matricele* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *şi* $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$. *Dacă* $X = 3A - B$ *atunci determinantul matricei* X *este:*

(a) 13

(b) 2

(c) 0

(d) 20

Soluţie: Vom identifica mai întâi componenţa matricei X:

$$X = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},\ det\ X = 13$$

Răspunsul corect este (a).

Problema 22 *Valoarea expresiei* $E = \cos\dfrac{23\pi}{12}\sin\dfrac{\pi}{12}$ *este:*

(a) $\dfrac{1}{2}$

(b) $\dfrac{1}{4}$

(c) $\dfrac{1}{8}$

(d) $\dfrac{1}{3}$

Soluţie: Avem:

$$\cos\frac{23\pi}{12} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12}.$$

Expresia de calculat se rescrie sub forma:

$$E = \cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}.$$

Răspunsul corect este (b).

Problema 23 *Valoarea limitei:*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}^n x - 1}{2\sin^2 x - 1} \text{ este}$$

(a) 0

(b) n

(c) 1

(d) ∞

Soluţie:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}^n x - 1}{2\sin^2 x - 1} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg}^{n-1} x + \operatorname{tg}^{n-2} x + \cdots + 1)}{2\left(\sin x - \sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\right)} = \lim_{n\to\frac{\pi}{4}}\frac{n}{2\sqrt{2}}\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\sin x - \sin\frac{\pi}{4}} \\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{n}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{2\cos x\cos\frac{\pi}{4}\sin\dfrac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\cos\dfrac{x+\frac{\pi}{4}}{2}} \\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{n}{2\sqrt{2}}\frac{2\sin\dfrac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\cos\dfrac{x-\frac{\pi}{4}}{2}}{\sin\dfrac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\cos\dfrac{x+\frac{\pi}{4}}{2}} = n\end{aligned} \tag{7}$$

Răspunsul corect este (b).

Problema 24 *Valoarea maximă a funcţiei* $f(x) = \sin^{2m} x\cdot\cos^{2n} x$ *cu* $m, n \in \mathbb{N}$ *se atinge pentru:*

(a) $\sin^2 x = 0$

(b) $\sin^2 x = 1$

(c) $\sin^2 x = \dfrac{m}{n+m}$

(d) $\sin^2 x = -1$

Soluţie: Notăm cu $\sin^2 x = u, u \in [0,1]$. Deci funcţia de analizat devine:

$$f(x) = F(u) = u^m(1-u)^n.$$

Calculăm derivata

$$F'(u) = mu^{m-1}(1-u)^n - nu^m(1-u)^{n-1} = u^{m-1}(1-u)^{n-1}(m - mu - nu)$$

Observăm că această derivată se anulează pentru:

$$\begin{cases} u = 0 \\ u = 1 \\ u = \dfrac{m}{n+m} \end{cases}$$

Pentru $u = 0$ şi $u = 1$ obţinem $f(x) = 0$. Pentru $u = \dfrac{m}{n+m}$ funcţia f ia valoarea $f = \dfrac{m^m \cdot n^n}{(m+n)^{m+n}}$.
Pentru a stabili natura extremului calculăm a două derivată a funcţiei F şi obţinem:

$$F^{''} = [u^{m-1}(1-u)^{n-1}]'[m - u(m+n)] + u^{m-1}(1-u)^{n-1}[-m-n]$$

Observăm că $F^{''}\left(\dfrac{m}{m+n}\right) = \dfrac{m^{m-1}}{(m+n)^{m-1}} \dfrac{n^{n-1}}{(m+n)^{n-1}}[-m-n] < 0$ deci acesta este un punct de maxim.
Răspunsul corect este (c).

Problema 25 *Considerăm matricea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. *Atunci* $A^n - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}$ *este:*

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2^n & 0 \\ 0 & 3^n & 4^n \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) I_3

(d) $\mathcal{O}_3$

Soluţie: Vom calcula mai întâi A^n. Pentru aceasta observăm:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 125 \end{pmatrix},\ A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 625 \end{pmatrix} \ldots A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}$$

Răspunsul corect este (b).