

Model subiect pentru testul grilă de Matematică – sesiunea iulie 2024

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m + 2$, $m \neq 0$. Mulțimea valorilor lui m pentru care aria triunghiului cu vârfurile în punctele de intersecție ale graficului lui f cu axele de coordonate este 5 este:

- (a) $\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\}$; (b) $\{\frac{1}{2}\}$; (c) $\{2\}$; (d) $\{-\frac{1}{3}\}$.

Soluție. Vom avea

$$\Delta = 4(m+1)^2 - 4m(m+2) = 4,$$

de unde

$$x_{1,2} = \frac{-2(m+1) \pm 2}{2m} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -1 - \frac{2}{m}.$$

Punctele de intersecție cu axa Ox vor fi deci $A(-1, 0)$ și $B(-1 - \frac{2}{m}, 0)$.

De asemenea, $f(0) = m + 2$, deci punctul de intersecție cu axa Oy va fi $C(0, m + 2)$. Cum ΔABC este dreptunghic, va avea aria

$$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot CO}{2} = \left| \frac{2}{m} \cdot (m+2) \cdot \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{m+2}{m} \right| = 5.$$

Vor rezulta valorile $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$.

Răspuns corect: (a). □

2. Suma rădăcinilor ecuației

$$\sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(x-2)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{x^2-4}$$

are valoarea:

- (a) 0; (b) $-\frac{2}{3}$; (c) 1; (d) 3.

Soluție. Se observă că dacă x este rădăcină a ecuației, atunci și $-x$ este rădăcină. Atunci suma este 0.

Soluție alternativă:

Condiții de existență: $|x| \geq 2$. Observăm că $x = \pm 2$ nu este soluție. Împărțind ecuația la $\sqrt{x^2-4}$ și notând $\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} = y$, ecuația devine $y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2}$, cu soluțiile 2 și $\frac{1}{2}$, ceea ce antrenează $x = \pm \frac{10}{3}$.

Răspuns corect: (a). □

3. Produsul rădăcinilor reale ale ecuației

$$(3 + 2\sqrt{2})^x + (\sqrt{2} - 1)^{2x} = 6$$

are valoarea:

- (a) 1; (b) -1; (c) $\sqrt{2}$; (d) $-\sqrt{2}$.

Soluție. Observăm că

$$\left(\sqrt{2} + 1\right)^2 = 3 + 2\sqrt{2}, \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1.$$

Cu notația $(3 + 2\sqrt{2})^x = t > 0$, obținem

$$t + \frac{1}{t} = 6,$$

de unde $t \in \{3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}\}$, adică $x \in \{\pm 1\}$.

Răspuns corect: (b) □

4. Multimea soluțiilor inecuației este:

$$|\ln |x|| < 1$$

este:

(a) $(-e, -e^{-1}) \cup (e^{-1}, e)$; (b) $(-e, 0) \cup (0, e)$; (c) $(-e, e)$; (d) $(-e^{-1}, e^{-1})$.

Soluție. CE: $x \neq 0$. Vom avea

$$\begin{aligned} -1 < \ln |x| < 1, \\ e^{-1} < |x| < e, \end{aligned}$$

de unde $x \in (-\infty, -e^{-1}) \cup (e^{-1}, \infty)$ și $x \in (-e, e)$.

Răspuns corect: (a) □

5. Valoarea sumei

$$C_{2023}^1 + C_{2023}^3 + \dots + C_{2023}^{2023}$$

este:

(a) 2^{2022} ; (b) 2^{2023} ; (c) 2023; (d) $2023 \cdot 2^{2022}$.

Soluție. Din binomul lui Newton,

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - 1)^{2023} = C_{2023}^0 - C_{2023}^1 + C_{2023}^2 - C_{2023}^3 + \dots + C_{2023}^{2022} - C_{2023}^{2023}, \\ 2^{2023} &= (1 + 1)^{2023} = C_{2023}^0 + C_{2023}^1 + C_{2023}^2 + C_{2023}^3 + \dots + C_{2023}^{2022} + C_{2023}^{2023}, \end{aligned}$$

de unde $2S = 2^{2023}$.

Răspuns corect: (a) □

6. Numerele complexe z_1, z_2, z_3 de modul 1 satisfac relațiile

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &\neq 0, \\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 &= 0. \end{aligned}$$

Atunci $|z_1 + z_2 + z_3|$ are valoarea:

(a) 1; (b) 2; (c) 3; (d) 4.

Soluție. Avem:

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2 + z_3)^2 &= 2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3) = 2z_1z_2z_3 \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right) \\ &= 2z_1z_2z_3 (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) = 2z_1z_2z_3 \overline{(z_1 + z_2 + z_3)}. \end{aligned}$$

Trecând la module, obținem

$$|z_1 + z_2 + z_3|^2 = 2|z_1||z_2||z_3|\overline{|z_1 + z_2 + z_3|} = 2|z_1 + z_2 + z_3|,$$

de unde $|z_1 + z_2 + z_3| = 2$.

Răspuns corect: (b) □

7. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ care satisface

$$f(x+y) \geq f(x) \cdot f(y) \geq 2023^{x+y}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Atunci $f(0) + f(1)$ are valoarea:

(a) 2023; (b) 1; (c) 2024; (d) 3.

Soluție. Deoarece putem observa ușor că funcția $f(x) = 2023^x$ satisface condițiile problemei, deducem că răspunsul corect este (c).

Soluție alternativă. Se observă că

$$f(0) \geq (f(0))^2 \geq 1,$$

de unde rezultă $f(0) = 1$.

Se deduce mai departe că pentru orice x ,

$$1 = f(0) = f(x-x) \geq f(x) \cdot f(-x) \geq 1,$$

de unde $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.

Din enunț, se observă că $f(x) \geq 2023^x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Mai departe,

$$\frac{1}{f(x)} = f(-x) \geq 2023^{-x} = \frac{1}{2023^x},$$

de unde $f(x) = 2023^x$ pentru orice x .

Răspuns corect: (c) □

8. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este inversabilă cu $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_n)$, atunci:

(a) $A^3 - A = 2(A + I_n)$; (b) $A^2 - A = I_n$; (c) $A^3 = 3A + I_n$; (d) $A = \frac{1}{2}(A^{-1} + I_n)$.

Soluție. Folosind relația din enunț, avem

$$\begin{aligned} 2I_n &= A^2 - A \Rightarrow A^2 = A + 2I_n, \\ A^3 &= A^2 + 2A = 3A + 2I_n, \end{aligned}$$

de unde $A^3 - A = 2(A + I_n)$.

Răspuns corect: (a). □

9. Presupunem că $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului $X^3 - 2024X + 2023$. Atunci determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 + x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 1 + x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & 1 + x_3 \end{vmatrix}$$

are valoarea:

(a) 0; (b) 1; (c) 2023; (d) $2i$.

Soluție. Prin adunarea tuturor coloanelor la prima, apoi prin scăderea primei linii din toate celelalte, rezultă, folosind și faptul că $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ din relațiile lui Viete, că

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix} = (1+x_1+x_2+x_3) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ = 1+x_1+x_2+x_3 = 1.$$

Răspuns corect: (b) □

10. Suma valorilor parametrului $\lambda \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul

$$\begin{cases} y+z = \lambda x \\ x+z = \lambda y \\ x+y = \lambda z \end{cases}$$

admite soluții nebanale este:

(a) 1; (b) -1 ; (c) 2; (d) 0.

Soluție. Va rezulta condiția

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = 0.$$

Deci valorile căutate ale parametrului λ sunt $2, -1$, având suma 1.

Răspuns corect: (a). □

11. Suma pătratelor rădăcinilor polinomului

$$(X+1)^{2023} + (X-1)^{2023}$$

este:

(a) $2022 \cdot 2023$; (b) $-2022 \cdot 2023$; (c) 0; (d) 1.

Soluție. Să observăm că polinomul de mai sus se poate scrie ca

$$X^{2023} + 2023X^{2022} + C_{2023}^2 X^{2021} + \dots + 1 + X^{2023} - 2023X^{2022} + C_{2023}^2 X^{2021} + \dots - 1 \\ = 2X^{2023} + 2C_{2023}^2 X^{2021} + \dots$$

Atunci, folosind relațiile lui Viete,

$$S_2 = x_1^2 + \dots + x_{2023}^2 = s_1^2 - 2s_2 = 0 - 2C_{2023}^2 = -2022 \cdot 2023.$$

Răspuns corect: (b). □

12. Fie polinomul $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ astfel încât

$$P(1) + P(2) + \dots + P(n) = n^4, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Numererele reale a, b, c, d sunt:

(a) $a = 4, b = -6, c = 4, d = -1$; (b) $a = 2, b = 0, c = 3, d = -1$;

(c) $a = 4, b = -6, c = 2, d = 1$; (d) nu există un astfel de polinom.

Soluție. Vom folosi sumele

$$\begin{aligned}1 + 2 + \dots + n &= \frac{n(n+1)}{2}, \\1^2 + 2^2 + \dots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\1^3 + 2^3 + \dots + n^3 &= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.\end{aligned}$$

Atunci

$$\begin{aligned}n^4 &= P(1) + P(2) + \dots + P(n) \\&= a \left(\frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \right) + b \left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \right) + c \frac{n^2 + n}{2} + dn,\end{aligned}$$

ceea ce va genera sistemul

$$\begin{cases} \frac{a}{4} = 1 \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{3} = 0 \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = 0 \\ \frac{b}{6} + \frac{c}{2} + d = 0, \end{cases}$$

care are soluția $a = 4, b = -6, c = 4, d = -1$.

Răspuns corect: (a). □

13. Pe mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale definim legea de compoziție

$$x \star y = xy - 2x - 2y + 6, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Pe o tablă sunt scrise numerele

$$-2023, -2022, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 2022, 2023.$$

Se aleg la întâmplare numerele a și b , se șterg, iar în locul lor scriem pe tablă numărul $a \star b$. După un anumit număr de pași, pe tablă rămâne un singur număr. Valoarea acestuia este:

(a) 2023; (b) 1; (c) 2; (d) $2022 \star 2023$.

Soluție. Se observă că $x \star 2 = 2 \star x = 2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Pe tablă rămâne numărul 2. □

Răspuns corect: (c)

14. Valoarea limitei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos 1 + 3 \cos 2 + \dots + 3^{n-1} \cos n}{1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \dots + (n+1)3^n}$$

este:

(a) ∞ ; (b) 0; (c) 1; (d) -1.

Soluție. Constatăm că

$$\begin{aligned}|\cos 1 + 3 \cos 2 + \dots + 3^{n-1} \cos n| &\leq 1 + 3 + \dots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}, \\1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \dots + (n+1)3^n &\geq (n+1)3^n,\end{aligned}$$

de unde

$$\left| \frac{\cos 1 + 3 \cos 2 + \dots + 3^{n-1} \cos n}{1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \dots + (n+1)3^n} \right| \leq \frac{3^n - 1}{2(n+1)3^n} \rightarrow 0.$$

Răspuns corect: (b). □

15. Numerele reale a, b, c pentru care

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(an + \sqrt{c + bn + n^2}) = 1$$

sunt:

(a) $a = -1, b = 0, c = -1$; (b) $a = -1, b = 0, c = 2$;

(c) $a = b = c = -1$; (d) $a = -1, b = 0, c = 1$.

Soluție. Observăm că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} an + \sqrt{c + bn + n^2} = a + 1 = 0,$$

altfel paranteza din limita de mai sus nu tinde la 0, iar limita căutată nu poate fi 1. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + bn + c} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{n^2 + bn + c - n^2}{\sqrt{n^2 + bn + c} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn^2 + cn}{\sqrt{n^2 + bn + c} + n} = 1.$$

Rezultă $b = 0$ și $\frac{c}{2} = 1$.

Răspuns corect: (b). □

16. Valoarea limitei

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \sin^3 x}{\operatorname{tg}^3 x - x^3}$$

este:

(a) $\frac{1}{2}$; (b) 0; (c) 1; (d) $\frac{1}{3}$.

Soluție. Avem:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \sin^3 x}{\operatorname{tg}^3 x - x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\operatorname{tg} x - x} \cdot \frac{x^2 + x \sin x + \sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\operatorname{tg}^2 x + x \operatorname{tg} x + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Răspuns corect: (a). □

17. Tangenta la curba $y = x^2 - x$ în punctul $(a, a^2 - a)$ trece prin punctul de coordonate $(2, 1)$ pentru:

(a) nicio valoare a lui a ;

(b) exact o valoare a lui a ;

(c) exact două valori ale lui a ;

(d) o infinitate de valori ale lui a .

Soluție. Ecuația tangentei la curbă în punctul $(a, a^2 - a)$ este

$$y - a^2 + a = (2a - 1)(x - a).$$

Punctul $(2, 1)$ se află pe această dreaptă dacă și numai dacă

$$a^2 - 4a + 3 = 0.$$

Răspuns corect: (c). □

18. Fie $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ primitiva funcției $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$ pe $[0, \infty)$ care satisface $F(1) = \frac{\pi}{2}$. Atunci $F(0)$ este egală cu:

- (a) $\frac{\pi}{4}$; (b) 1; (c) 0; (d) $\frac{\pi}{2}$.

Soluție. Folosind formula de integrare prin părți, obținem că o primitivă a funcției f este de forma

$$x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C.$$

Cum $F(1) = \frac{\pi}{2}$, rezultă că

$$F(x) = x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} + 1$$

și deci $F(0) = 1$.

Răspuns corect: (b). □

19. Fie $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție pară integrabilă astfel încât $\int_{-1}^1 f(x) dx = 3$. Atunci limita șirului

$$a_n = \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f(1)}{3n}$$

este:

- (a) $\frac{1}{2}$; (b) 0; (c) $\frac{\pi}{4}$; (d) 1.

Soluție. Observăm că, deoarece funcția este pară, vom avea

$$3 = \int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx.$$

Pe de altă parte,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f(1) \right) = \frac{1}{3} \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

Răspuns corect: (a). □

20. Valoarea limitei

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \ln(1 - \sqrt{t}) dt}{x^3}$$

este:

- (a) 0; (b) $-\frac{1}{3}$; (c) $-\frac{2}{3}$; (d) $-\infty$.

Soluție: Ne aflăm în cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$ iar pentru a identifica valoarea limitei vom aplica regula lui l'Hospital. Vom avea

$$\ell = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-x) \cdot 2x}{3x^2} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-x)}{x} = -\frac{2}{3}.$$

Răspuns corect: (c). □

21. Cea mai mică valoare a expresiei

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y-5)^2},$$

pentru $x, y \in \mathbb{R}$ este:

(a) 3; (b) 4; (c) 6; (d) 5.

Soluție. Geometric, se observă că valoarea minimă se atinge atunci când punctele $A(2, 1)$, $M(x, y)$ și $C(-1, 5)$ sunt coliniare, iar valoarea minimă a sumei este

$$|AC| = \sqrt{(-1-2)^2 + (5-1)^2} = 5.$$

Răspuns corect: (d). □

22. Dacă $(-4, 0)$ și $(1, -1)$ sunt două vârfuri ale unui triunghi de arie 4, atunci cel de-al treilea vârf se află pe dreapta:

(a) $x + 5y = 0$; (b) $x + 5y + 8 = 0$; (c) $x + 5y + 12 = 0$; (d) $x + 5y + 4 = 0$.

Soluție: Fie (x, y) coordonatele pentru al treilea vârf obținem:

$$\mathcal{A}_{\text{triunghi}} = \frac{1}{2} |\Delta|.$$

Avem:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & x \\ 0 & -1 & y \end{vmatrix} = |x + 5y + 4|.$$

Obținem $|x + 5y + 4| = 8 \Rightarrow x + 5y - 4 = 0, x + 5y + 12 = 0$.

Răspuns corect: (c). □

23. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat, iar a și b două numere reale astfel încât $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{BE} + b\overrightarrow{CF}$. Atunci numărul $b - 2a$ este egal cu:

(a) -3 ; (b) 3; (c) -1 ; (d) 1.

Soluție. Observăm:

$$\overrightarrow{AD} = 2a\overrightarrow{AF} + 2b\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow 2(-\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}) = 2a\overrightarrow{AF} + 2b\overrightarrow{BA} \rightarrow b = -1, a = 1 \rightarrow b - 2a = -3.$$

Răspuns corect: (a). □

24. Suma soluțiilor ecuației

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}$$

din intervalul $[0, 2\pi]$ este:

(a) $\frac{\pi}{2}$; (b) $\frac{2\pi}{3}$; (c) π ; (d) $\frac{\pi}{6}$.

Soluție. Ecuația se poate rescrie

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

de unde $x + \frac{\pi}{6} \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$, sau $x \in \left\{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right\}$. Suma căutată este $\frac{2\pi}{3}$.

Răspuns corect: (b) □

25. Numărul soluțiilor ecuației

$$\sin^4 t + \sin^4\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

din intervalul $[-\pi, \pi]$ este:

(a) 0; (b) 4; (c) 5; (d) o infinitate.

Soluție. Folosind expresiile

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2},$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2},$$

obținem

$$\begin{aligned}\sin^4 t &= \left(\frac{1 - \cos 2t}{2}\right)^2 = \frac{1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t}{4} = \frac{3 - 4\cos 2t + \cos 4t}{8}, \\ \sin^4\left(t + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{3 - 4\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(4t + \pi)}{8} = \frac{3 + 4\sin 2t - 2\cos 4t}{8}.\end{aligned}$$

Va rezulta

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} + \frac{1}{2}(\sin 2t - \cos 2t) &= \frac{1}{4}, \\ (\sin 2t - \cos 2t) &= -1, \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2t - \cos 2t) &= -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Cum $t \in [-\pi, \pi]$, vom avea $2t - \frac{\pi}{4} \in [-2\pi - \frac{\pi}{4}, 2\pi - \frac{\pi}{4}]$, deci valoarea $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ va fi atinsă de 5 ori, în punctele

$$-\pi, 0, \pi, -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

Răspuns corect: (c) □