Universitatea Tehnică ”Gheorghe Asachi” din Iaşi
Facultatea de Automatică şi Calculatoare
Admitere – sesiunea iulie 2025
Domeniile: Calculatoare şi Tehnologia Informaţiei
Ingineria Sistemelor (Automatică şi Informatică Aplicată)

Model 11 de subiect pentru testul grilă de Matematică

1. Rădăcinile ecuaţiei $4x^2 + 2mx + 3 = 0, m \in \mathbb{R}$ sunt reale strict negative dacă:
(a) $m \in \left[2\sqrt{3}, \infty\right)$; (b) $m \geq 0$; (c) $m \in (-\infty, -4]$; (d) $m \leq 0$.

Soluţie. Condiţiile impuse sunt $\Delta = 4(m^2 - 12) \geq 0,\ S = x_1 + x_2 = -\dfrac{m}{2} < 0$ şi, respectiv $P = x_1 x_2 = \dfrac{3}{4} > 0$.

Răspuns corect: (a). □

2. Se consideră ecuaţia de gradul al doilea

$$(1 + \alpha^2)x^2 - (1 + \alpha)x + \alpha(1 - \alpha) = 0,$$

cu rădăcinile $x_1, x_2 \neq 0$. Mulţimea tuturor valorilor lui $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care

$$-1 \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1 x_2} \leq 0$$

este:
(a) $(-\infty, 1]$; (b) $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$; (c) $(-\infty, -1]$; (d) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

Soluţie. Inecuaţia din enunţ este echivalentă cu

$$-1 \leq \frac{2 + \alpha + \alpha^2}{\alpha(1 - \alpha)} \leq 0.$$

Rezultă numitorul strict negativ, deci $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, şi

$$\alpha^2 - \alpha \geq 2 + \alpha + \alpha^2,$$

de unde $\alpha \in (-\infty, -1]$.

Răspuns corect: (c). □

3. Numărul de elemente ale mulţimii

$$A = \left\{ z \in \mathbb{Q} \mid z = \frac{x}{(x+1)(x+2)}, x \in \mathbb{Z}, |x| \leq 10 \right\}.$$

este:
(a) 21; (b) 19; (c) 18; (d) 17.

Soluţie. A este mulţimea valorilor funcţiei $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)(x+2)}$ definită pe mulţimea

$$\{-10, -9, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., 9, 10\} \setminus \{-2, -1\}.$$

Dacă funcţia ar fi injectivă numărul valorilor ar fi $21-2=19$.

Determinăm numărul perechilor pentru care $f(x)=f(y), x\neq y$.

$$f(x)-f(y)=0\Leftrightarrow \frac{x}{(x+1)(x+2)}-\frac{y}{(y+1)(y+2)}=\frac{-(x-y)(xy-2)}{(x+2)(x+1)(y+2)(y+1)}=0$$
$$\Leftrightarrow -(x-y)(xy-2)=0\Rightarrow xy=2, x,y\in\mathbb{Z}, |x|\leq 10, |y|\leq 10\Rightarrow (x,y)\in\{(-2,-1)(1,2)\}.$$

Aşadar pentru $x=1$ şi $x=2$ se obţine acelaşi $z=\dfrac{1}{6}$, deci rămân doar $19-1=18$ valori distincte în mulţimea A.

Răspuns corect: (c). □

4. Mulţimea tuturor numerelor reale care satisfac inecuaţia:

$$x^{\sqrt{x}}>\left(\sqrt{x}\right)^{x}$$

este:

(a) $\mathbb{R}$; (b) $(1,4)$; (c) $[1,4]$; (d) nu există.

Soluţie. Condiţii existenţă $x\in(0,1)\cup(1,\infty)$. Vom avea:

$$\ln x^{\sqrt{x}}>\ln\left(\sqrt{x}\right)^{x}\Rightarrow\sqrt{x}\ln x>x\ln\sqrt{x}\Rightarrow\sqrt{x}\ln x-\frac{1}{2}x\ln x>0$$
$$\sqrt{x}\ln x\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)>0\Rightarrow x\in(1,4).$$

Răspuns corect: (b). □

5. Toate numerele complexe $z\in\mathbb{C}$ care verifică ecuaţia $|z|-z=1-2i$ sunt:

(a) $z=-\dfrac{1}{2}+i$; (b) $z=\dfrac{3}{2}, z=\dfrac{3}{2}+2i$; (c) $z=\dfrac{3}{2}+2i$; (d) $z=\dfrac{5}{2}-2i$.

Soluţie. Pentru $z=x+iy$ obţinem $\sqrt{x^2+y^2}-x-iy=1-2i$, de unde $y=2$ şi $\sqrt{x^2+4}=x+1$, deci $x=\frac{3}{2}$.

Răspuns corect: (c). □

6. Coeficientul lui x^2 din dezvoltarea

$$(1+x)^3+(1+x)^4+(1+x)^5+...+(1+x)^{25}$$

este:

(a) 2600; (b) 2601; (c) 2599; (d) 2598.

Soluţie. Avem:

$$\sum_{k=3}^{25}C_k^2=\sum_{k=3}^{25}\frac{k(k-1)}{2}=\sum_{k=1}^{25}\frac{k(k-1)}{2}-1=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{25}k(k-1)-1$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{25}k^2-\sum_{k=1}^{25}k\right)-1=\frac{1}{2}\frac{25\cdot 26\cdot 51}{6}-\frac{1}{2}\frac{25\cdot 26}{2}-1=2599.$$

Răspuns corect: (c). □

7. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ o matrice care verifică relaţia

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+x & 1+x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} A$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Atunci $A^n, n \in \mathbb{N}^*$, este:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 1 & n & -n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluţie. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1+x & 1+x^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} gx^2+dx+a & hx^2+ex+b & kx^2+fx+c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

deci $g = d = h = f = 0, a = b = e = k = c = 1$. de unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculăm $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Prin inducţie se verifică

$A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & k+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Răspuns corect: (c). □

8. Presupunem că x_1, x_2, x_3, x_4 sunt 4 numere consecutive. Determinantul

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 1+x_4 \end{vmatrix}$$

este de forma:

(a) $4k$; (b) $4k+1$; (c) $4k+2$; (d) $4k+3$.

Soluţie. Se observă că determinantul este egal cu $1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 + 4k + 6 = 4m + 3$.

Răspuns corect: (d). □

9. Pentru ce valori ale parametrilor reali a şi b sistemul de mai jos este compatibil nedeterminat?

$$\begin{cases} 2x+3y+4z & = 5 \\ ax+(a+1)\,y+(a+2)\,z & = a+3 \\ x+by+b^2z & = b^3. \end{cases}$$

(a) $a = 2$ şi $b = 1$; (b) $a = 2$, $b \in \mathbb{R}$;

(c) $a\in\mathbb{R}$, $b=1$;   (d) $a=2, b\in\mathbb{R}$ sau $a\in\mathbb{R}$, $b=1$.

Soluţie. Determinantul sistemului este $\Delta=(b-1)^2(a-2)$. Pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $b\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, sistemul are soluţie unică.

Pentru $a=2$, primele două ecuaţii coincid şi minorul

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 2 & 3\\ 1 & b\end{vmatrix}=2b-3$$

poate fi considerat minor principal, dacă $b\neq 3/2$. Atunci

$$\operatorname{rang} A=\operatorname{rang}\overline{A}=2$$

şi sistemul este compatibil nedeterminat. Dacă $b=3/2$, atunci minorul principal se poate lua $\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 4\\ 1 & 9/4\end{vmatrix}\neq 0$ şi avem de asemenea un sistem compatibil nedeterminat.

Pentru $b=1$, luăm drept minor principal pe $\Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1$. Determinantul caracteristic este în acest caz

$$\Delta_c=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5\\ a & a+1 & a+3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0,$$

deci sistemul este din nou compatibil nedeterminat, $\forall a\in\mathbb{R}$.

Răspuns corect: (d). □

10. Fie matricea pătratică A de ordin 2 cu elemente reale pentru care suma elementelor pe fiecare linie este 5, iar suma elementelor pe fiecare coloană este 5. Atunci suma tuturor elementelor matricei A^2 este:

(a) 50;   (b) 25;   (c) 100;   (d) 10.

Soluţie. Elementul (i,j) al matricei A^2 este $\sum\limits_{k=1}^{2} a_{ik}a_{kj}$.

Ştim că $\sum\limits_{i=1}^{2} a_{ij}=5$, $\sum\limits_{j=1}^{2} a_{ij}=5$. Atunci:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{2} a_{ik}a_{kj}\right)=\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{2} a_{ik}\left(\sum_{j=1}^{2} a_{kj}\right)\right)=5\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{2} a_{ik}\right)=50.$$

Răspuns corect: (a). □

11. Fie $n\in\mathbb{N}$ un număr natural impar. Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziţie:

$$x\star y=\sqrt[n]{x^n+y^n}.$$

Atunci limita

$$\ell=\lim_{n\to\infty}\underbrace{2025\star 2025\star\ldots\star 2025}_{\text{de } n \text{ ori}}$$

are valoarea:

(a) 2025;   (b) 0;   (c) ∞;   (d) 1.

Soluţie. Se observă că

$$\underbrace{x \star x \star ... \star x}_{\text{de } n \text{ ori}} = x\sqrt[n]{n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rezultă limita căutată are valoarea 2025.

Răspuns corect: (a). $\square$

12. Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat prin relaţia de recurenţă:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{18}{x_n}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_0 = 1.$$

Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}$ este:

(a) 0; (b) $+\infty$; (c) 6; (d) 2.

Soluţie. Se observă că şirul este strict crescător, deci are limită, finită sau infinită. Dacă ar fi finită, obţinem contradicţie. Calculăm, folosind Teorema Cesaro-Stolz,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{n} \overset{C-S}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{18}{x_n}\left(2x_n + \frac{18}{x_n}\right) = 36.$$

Atunci limita căutată este 6.

Răspuns corect: (c). $\square$

13. Valoarea limitei

$$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^3 x - x^3}{x^5}$$

este:

(a) $\frac{1}{4}$; (b) 1; (c) 0; (d) $\frac{1}{2}$.

Soluţie. Se poate scrie limita ca

$$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 x + x \operatorname{tg} x + x^2}{x^2}.$$

Avem

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x + x \operatorname{tg} x + x^2}{x^2} = 3$$

şi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

Rezultă că limita căutată are valoarea 1.

Răspuns corect: (b). $\square$

14. Considerăm funcţia polinomială $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x) = (x-1)(x-2) \cdot ... \cdot (x-2026), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Valoarea lui $k \in \mathbb{N}$ pentru care derivata $f^{(k)}$ are exact k rădăcini reale este:

(a) 2026; (b) 2024; (c) 1013; (d) 1.

Soluţie. Aplicând Teorema lui Rolle pentru f pe fiecare interval de tipul $[k, k+1]$, $k = \overline{1, 2025}$, vom găsi $c_k \in (k, k+1)$, $k = \overline{1, 2025}$ astfel încât $f'(c_k) = 0$. Cum f' este un polinom de grad 2025, rezultă că are exact 2025 rădăcini reale. Aplicând din nou Teorema lui Rolle pentru f' pe intervalele de tipul $[c_k, c_{k+1}]$, $k = \overline{1, 2024}$, găsim $d_k \in (c_k, c_{k+1})$, $k = \overline{1, 2024}$ astfel încât $f''(d_k) = 0$. Va rezulta inductiv că $f^{(k)}$ are $2026 - k$ rădăcini reale, şi de aici $k = 2026 - k$, deci $k = 1013$.

Răspuns corect: (c). □

15. Pentru ce valori ale parametrului $a > 0$, inegalitatea $2^x + a^x \geq 2$ are loc pentru orice $x \in \mathbb{R}$?

(a) $a = 2$; (b) $a \geq 2$; (c) $a = \frac{1}{2}$; (d) $a < \frac{1}{2}$.

Soluţie. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + a^x - 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Inegalitatea din enunţ este echivalentă cu $f(x) \geq f(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Cu alte cuvinte, $x_0 = 0$ este punct de minim pentru funcţia f, deci $f'(0) = 0$ sau $\ln a + \ln 2 = 0$. Se obţine $a = \frac{1}{2}$.

Valoarea găsită satisface condi?iile problemei:

$$2^x + \frac{1}{2^x} - 2 = \left(2^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2^{\frac{x}{2}}}\right)^2 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Răspuns corect: (c). □

16. Fie

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2x+1}{x^2 (x+1)^2}.$$

Precizaţi care afirmaţie este adevărată:

(a) $f'(x) = \frac{2(3x^2 + 3x + 1)}{x^3 (x+1)^3}$; (b) f funcţie pară;

(c) f are puncte de extrem; (d) f are un punct de inflexiune.

Soluţie. $f(-x) = \frac{-2x+1}{x^2 (-x+1)^2} \neq f(x)$.

$$f'(x) = \frac{2}{x^2 (x+1)^2} - \frac{2}{x^2} \frac{2x+1}{(x+1)^3} - \frac{2}{x^3} \frac{2x+1}{(x+1)^2} = -\frac{2}{x^3 (x+1)^3} (3x^2 + 3x + 1) \neq 0.$$

$$f''(x) = \frac{6}{x^4 (x+1)^4} (4x^3 + 6x^2 + 4x + 1).$$

$4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Răspuns corect: (d). □

17. Valoarea integralei nedefinite

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin x} dx,$$

pentru $x \in (-1, 1)$, este:

(a) $I = -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} e^{\arcsin x} + \frac{x}{2} e^{\arcsin x} + \mathcal{C}$; (b) $I = \frac{x}{4} e^{\arcsin x} + \mathcal{C}$;

(c) $I = \sqrt{1-x^2} e^{\arcsin x} + \mathcal{C}$; (d) $I = \sqrt{1-x^2} e^{\arcsin x} + x e^{\arcsin x} + \mathcal{C}$.

Soluţie. Aplicăm metoda de integrare prin părţi:

$$\begin{aligned}
I &= \int \left(-\sqrt{1-x^2}\right)' e^{\arcsin x} dx = -\sqrt{1-x^2}\cdot e^{\arcsin x} + \int \sqrt{1-x^2}\cdot e^{\arcsin x}\cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= -\sqrt{1-x^2}\cdot e^{\arcsin x} + \int x' \cdot e^{\arcsin x} dx \\
&= -\sqrt{1-x^2}\cdot e^{\arcsin x} + x\cdot e^{\arcsin x} - \int x\cdot e^{\arcsin x}\cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= -\sqrt{1-x^2}\cdot e^{\arcsin x} + x\cdot e^{\arcsin x} - I.
\end{aligned}$$

Răspuns corect: (a). □

18. Fie funcţia

$$f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\cos(n\arccos x).$$

Valoarea numărului n natural pentru care volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei f în jurul axei Ox să fie egală cu $\frac{\pi}{6}$ este:

(a) 1; (b) 0; (c) 3; (d) 2.

Soluţie. Vom avea:

$$V=\pi\int_0^1 \cos^2(n\arccos x)dx.$$

Cu schimbarea de variabilă $\arccos x = t, x=\cos t, dx=-\sin t dt, x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}, x=1\Rightarrow t=0$, obţinem:

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2(nt)\,(-\sin t)\,dt = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2nt)\sin t dt \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin t + \frac{1}{2}\left(\sin(2n+1)t+\sin(-2n+1)t\right)\right) dt \\
&= \frac{\pi}{2}\left(-\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\left(\left(-\frac{1}{2n+1}\cos\left(2n+1\right)t\right) - \left(-\frac{1}{2n-1}\cos\left(2n-1\right)t\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{4n^2-1}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{2n^2-1}{4n^2-1}.
\end{aligned}$$

Deci

$$\frac{\pi}{2}\frac{2n^2-1}{4n^2-1}=\frac{\pi}{6}, n=1$$

Răspuns corect (a). □

19. Valoarea limitei

$$\ell=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t |\sin x|\ dx$$

este:

(a) $\dfrac{2}{\pi}$; (b) $\dfrac{\pi}{2}$; (c) 0; (d) ∞.

Soluţie. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|\sin x|$ este o funcţie periodică de perioadă π şi pentru orice $k\in\mathbb{N}^\star$,

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\ dx = 2.$$

Pentru orice $t>0$, există $n\in\mathbb{N}$ astfel încât

$$(n-1)\pi \le t < n\pi.$$

Atunci

$$\frac{1}{n\pi} < \frac{1}{t} \le \frac{1}{(n-1)\pi}$$

şi

$$\int_0^{(n-1)\pi} |\sin x|\ dx \le \int_0^t |\sin x|\ dx < \int_0^{n\pi} |\sin x|\ dx.$$

Deci

$$2(n-1) \le \int_0^t |\sin x|\ dx \le 2n,$$

de unde

$$\frac{2(n-1)}{n\pi} \le \frac{1}{t}\int_0^t |\sin x|\ dx \le \frac{2n}{(n-1)\pi}.$$

Făcând $t\to\infty$, rezultă $n\to\infty$ şi

$$\ell = \frac{2}{\pi}.$$

Răspuns corect: (a). □

20. Valoarea expresiei

$$E = \frac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{\sin(a+b)+\sin(a-b)}$$

este:

(a) $\sin a\cos b - \cos a \sin b$; (b) $\operatorname{ctg} a\cdot \operatorname{tg} b$; (c) $\operatorname{tg} 2b$; (d) $\operatorname{tg} a\cdot\operatorname{ctg} b$.

Soluţie. Avem

$$E = \frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b-\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\sin a\cos b+\cos a\sin b+\sin a\cos b-\cos a\sin b} =$$

$$= \frac{2\cos a\sin b}{2\sin a\cos b} = \operatorname{ctg} a\cdot\operatorname{tg} b.$$

Răspuns corect: (b). □

21. Fie $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $\cos x\neq 0$ şi

$$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos 3x}{b},\ \text{ unde } a,b\in(0,\infty), a\ge b.$$

Atunci valoarea lui $\operatorname{tg}^2 x$ este:

(a) $\dfrac{a+b}{3a+b}$; (b) $\dfrac{a-b}{3a+b}$; (c) $\dfrac{2a+b}{2a}$; (d) $\dfrac{a-b}{2a+b}$.

Soluţie. $\dfrac{\cos x}{a} = \dfrac{\cos 3x}{b} = \dfrac{\cos x + \cos 3x}{a+b} = \dfrac{2\cos x \cos 2x}{a+b} \Rightarrow$

$\cos 2x = \dfrac{a+b}{2a} \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 = \dfrac{a+b}{2a} \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{3a+b}{4a}$

$\operatorname{tg}^2 x = -1 + \dfrac{1}{\cos^2 x} = -1 + \dfrac{4a}{3a+b} = \dfrac{a-b}{3a+b}$.

Răspuns corect: (b). □

22. Numărul soluţiilor din intervalul $[0, 2\pi)$ ale ecuaţiei

$$\cos^3 x + \sin^2 x = 0$$

este:

(a) 1; (b) 2; (c) 3; (d) 4.

Soluţie. Prin substituţia $\cos x = y \in [-1, 1]$, ecuaţia devine

$$y^3 - y^2 + 1 = 0.$$

Folosind tabelul de variaţie al funcţiei $f(y) = y^3 - y^2 + 1$ pe $[-1, 1]$, obţinem că f are o unică rădăcină în intervalul $(-1, 0)$, pe care o notăm cu y_0. Deducem că ecuaţia $\cos x = y_0$ are 2 rădăcini în intervalul $[0, 2\pi)$.

Răspuns corect: (b). □

23. Fie triunghiul ABC cu D, E, F mijloacele laturilor BC, AC, respectiv AB. Atunci vectorul $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$ este egal cu:

(a) $\overrightarrow{0}$; (b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; (c) $\overrightarrow{AC}$; (d) $\overrightarrow{BC}$.

Soluţie. Vom avea:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right),$$
$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}\right),$$
$$\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right),$$

de unde suma căutată este $\overrightarrow{0}$.

Răspuns corect: (a). □

24. Se consideră triunghiul cu vârfurile $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, 6)$. Coordonatele centrului cercului circumscris şi raza acestui cerc sunt:

(a) $(1, 1)$, 2; (b) $(0, 2)$, $2\sqrt{2}$; (c) $(0, 8/3)$, $10/3$; (d) $(2, 2)$, $10/3$.

Soluţie. Observăm că mediatoarea segmentului AB este chiar axa Oy. Centrul M al cercului circumscris va avea coordonatele $M(0, x)$. Cum $AM = BM = CM \Rightarrow \sqrt{4+x^2} = \sqrt{4+x^2} = 6 - x$, deci $x = 8/3$. Raza cercului este $R = MC = 6 - \dfrac{8}{3} = \dfrac{10}{3}$.

Răspuns corect: (c). □

25. În planul xOy considerăm punctele $A(3, \sqrt{3})$ şi $B(4, 0)$. Atunci unghiul dintre înălţimea şi mediana ΔAOB care pleacă din unghiul A are măsura egală cu:

(a) $\dfrac{\pi}{12}$; (b) $\dfrac{\pi}{4}$; (c) $\dfrac{\pi}{3}$; (d) $\dfrac{\pi}{6}$.

Soluţie. Să notăm cu D piciorul perpendicularei care pleacă din punctul A şi cu C punctul de intersecţie dintre mediana care pleacă din punctul A şi axa Ox. Atunci $C(2,0)$ şi $D(3,0)$. Rezultă că

$$\sin\widehat{DAC} = \frac{CD}{AC} = \frac{1}{2}.$$

Rezultă că $m\left(\widehat{DAC}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

Răspuns corect: (d). $\square$