Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iaşi
Facultatea de Automatică şi Calculatoare
Admitere sesiunea iulie 2025
Domeniile: Calculatoare şi tehnologia informaţiei
Ingineria sistemelor (Automatică şi informatică aplicată)

Model 12 de subiect pentru testul grilă de Matematică

1. Se consideră ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$ unde $a,\ b,\ c$ sunt numere întregi impare. Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?

   A) Ecuaţia are o rădăcină pară.
   B) Ecuaţia are două rădăcini pare.
   C) Ecuaţia are o rădăcină impară.
   D) Ecuaţia nu are rădăcini întregi.

   Soluţie: 1 *Vom analize situaţiile în care rădăcinile sunt numere pare, respectiv impare:*

   - *Dacă considerăm $x = p,\ p \in \mathbb{Z}$ număr par atunci $P(p) = ap^2 + bp + c$ este un număr impar deci ecuaţia nu are rădăcină întreagă număr par.*
   - *Dacă considerăm $x = m$ rădăcină cu m impar atunci $P(m) = am^2 + bm + c$ este tot un număr impar. Deci ecuaţia nu are rădăcină întreaga număr impar.*

   În concluzie ecuaţia propusă nu are rădăcini întregi.
   Răspunsul corect este D).

2. Numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei
$$\log_2^2 x^4 + 2\log_4 x^2 = 18$$
   este

   A) 1
   B) 2
   C) 3
   D) 4

   Soluţie: 2 *Dacă notăm cu $x^2 = t > 0$ ecuaţia devine*
$$\left(\log_2 t^2\right)^2 + 2\log_4 t = 18 \Leftrightarrow (2\log_2 t)^2 + 2\frac{\log_2 t}{\log_2 4} = 18 \Leftrightarrow 4\left(\log_2 t\right)^2 + \log_2 t - 18 = 0.$$
   Avem de rezolvat următoarea ecuaţie de gradul al doilea: $4u^2 + u - 18 = 0$, unde $u = \log_2 t$. Ecuaţia precedentă are două rădăcini
$$u_1 = -\frac{9}{4},\ u_2 = 2.$$
   Din $u = \log_2 t \to t = 2^u \to t_1 = 2^{-\frac{9}{2}},\ t_2 = 2^2$. Cum $x^2 = t \to x_{1,2} = \pm\sqrt{t}$. Deci ecuaţia va avea patru rădăcini reale.
   Răspunsul corect este D).

3. Să se determine al patrulea termen din dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$, în ipoteza că $2^{2n} - 2^n - 240 = 0, n \in \mathbf{N}$.

   A) $\frac{4}{\sqrt{x}}$
   B) $4\sqrt{x}$
   C) $6\sqrt[3]{x}$
   D) $\frac{6}{\sqrt[3]{x}}$

Soluţie: 3 *Mai întâi vom rezolva ecuaţia:*

$$2^{2n} - 2^n - 240 = 0$$

Dacă notăm $2^n = t$ *ecuaţia de rezolvat devine*

$$t^2 - t - 240 = 0 \rightarrow \Delta = 1 + 960 = 961 \rightarrow t_{1,2} = \frac{1 \pm 31}{2} \rightarrow \begin{cases} t_1 = 16 \\ t_2 = -15 < 0 \end{cases} \rightarrow n = 4.$$

Deci:

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^4 \tag{1}$$

Formula termenului general $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$*. Deci* $T_4 = C_4^3 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{4}{\sqrt{x}}$.
Răspunsul corect este A).

4. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pentru care există $a, b \in \mathbb{R}^*$ cu proprietatea că $x_1+x_2+\ldots+x_n = an^2+bn$, $\forall n \geq 1$. Atunci şirul este

   A) progresie aritmetică
   B) şir mărginit
   C) progresie geometrică
   D) şir constant

Soluţie: 4 *Dacă* $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = s_n$ *atunci* $x_n = s_n - s_{n-1} = an^2 + bn + a(n-1)^2 + b(n-1) = 2an - a + b$*.*
Avem $x_{n+1} - x_n = 2a(n+1) - a + b - 2an + a - b = 2a,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$*. Deci şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este o progresie aritmetică cu raţia* $2a$*.*
Răspunsul corect este A).

5. Considerăm pe mulţimea numerelor complexe ecuaţia $|z|^2 + z = 3 + 4i$. Numărul de soluţii ale ecuaţiei este egal cu:

   A) 0
   B) 1
   C) 2
   D) 3

Soluţie: 5 *Vom considera drept punct de plecare forma algebrică a numărului complex* $z = a + ib$*. Se obţine* $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$*. Ecuaţia de analizat devine:*

$$a^2 + b^2 + a + ib = 3 + 4i$$

Egalăm părţile reale respectiv imaginare din primul şi al doilea membru şi obţinem

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 + a + 13 = 0 \\ b = 4 \end{cases}$$

Se observă că discriminantul ecuaţiei de gradul II în a este negativ deci $a \notin \mathbb{R}$*.*
Răspunsul corect este A).

6. Dacă $a < b < c$ şi $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \end{vmatrix}$ atunci:

   A) $D = 0$
   B) $D < 0$
   C) $D > 0$
   D) $D = -a^2 - b^2 - c^2$

Soluţie: 6 *Obsevăm că folosind proprietăţile determinanţilor putem rescrie determinantul D după cum urmează*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+1 & b+1 & c+1 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \end{vmatrix}$$

Alternativ: *Putem să scădem din a doua linie prima linie şi obţinem acelaşi rezultat. Deoarece al doilea determinant scris în suma de mai sus are două linii egale rezultă că valoarea acestuia este 0. Revenim la primul determinant pe care îl putem privi ca pe un determinant de tip Vandermonde sau putem să folosim transformări asupra coloanelor sale cu scopul de a forma zerouri*

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+1 & b+1 & c+1 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+1 & b-a & c-a \\ (a+1)^2 & (b-a)(a+b+2) & (c-a)(a+c+2) \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b+2 & a+c+2 \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)(c-b) > 0. \end{aligned}$$

Răspunsul corect este C).

7. Fie $a \in (0,1)$ şi $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Atunci $\lim_{n\to\infty} \left(A^3 + A^6 + \ldots + A^{3n}\right)$ este

   A) $\dfrac{a}{1-a} I_3$
   B) $\dfrac{a}{1-a} A$
   C) I_3
   D) $\dfrac{a}{1+a} I_3$

Soluţie: 7 *Prin calcul se obţine*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = aI_3.$$

De aici $A^6 = a^2 I_3, \ \ldots A^{3n} = a^n I_3$. Limita de calculat devine:

$$\lim_{n\to\infty} \left(a + a^2 + \ldots + a^n\right) I_3 = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1} - a}{a-1} I_3 = -\frac{a}{a-1} I_3 = \frac{a}{1-a} I_3.$$

Răspunsul corect este A).

8. Se consideră sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ mx - y + 7z = n \end{cases}.$$

   Valoarea parametrului n pentru care sistemul este compatibil nedeterminat este:

   A) 1
   B) 4
   C) -1
   D) 3

Soluţie: 8 *Pentru ca sistemul neomogen să fie compatibil nedeterminat rangul matricei sistemului trebuie să fie egal cu rangul matricei extinse, ambele ranguri fiind mai mici decât numărul de necunoscute.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ m & -1 & 7 \end{pmatrix}, \ \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ m & -1 & 7 & | & n \end{pmatrix}$$

Avem $\det A = 20 - 5m$, *deci pentru* $m = 4$ *rangul matricei* A *este egal cu* 2. *Determinantul* $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, $\Delta_{car} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 7 & n \end{vmatrix} = 5n - 20$. *Observăm că* $\Delta_{car} = 0 \Leftrightarrow n = 4$. *Deci sistemul este compatibil nedeterminat dacă* $n = 4$.
Răspunsul corect este B).

9. Toate valorile parametrului $a \in \mathbb{R}$ pentru care matricea $\begin{pmatrix} a-1 & 1 & a & a-2 \\ 1 & 2a & -1 & a+3 \\ -a+3 & 4a-1 & -a-2 & a+8 \end{pmatrix}$ are rang maxim sunt

A) $a = 0$
B) $a \geq 0$
C) $a \in \mathbb{R}^*$
D) $a \in \mathbb{R}$

Soluţie: 9 *Deoarece matricea are un element nenul, rangul va fi* ≥ 1. *Considerăm minorul de ordin* 2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 2a & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2a^2$$

Observăm că pentru orice $a \in \mathbb{R}$, *avem*

$$\Delta \leq -1 < 0$$

deci $\Delta \neq 0$. *Aşadar, rangul este cel puţin* 2. *Vom borda în cele ce urmează minorul identificat anterior cu coloanele rămase:*

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a-1 & 1 & a \\ 1 & 2a & -1 \\ -a+3 & 4a-1 & -a-2 \end{vmatrix} \overset{L_3 = L_1 + L_3}{=} \begin{vmatrix} a-1 & 1 & a \\ 1 & 2a & -1 \\ 2 & 4a & -2 \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

Analog avem:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & a-2 \\ 2a & -1 & a+3 \\ 4a-1 & -a-2 & a+8 \end{vmatrix} \overset{L_3 = L_3 + L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & a-2 \\ 2a & -1 & a+3 \\ 4a & -2 & 2a+6 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

deci rangul nu poate fi 3. *Deci rangul este* 2 *pentru orice* $a \in \mathbb{R}$.
Răspunsul corect este D).

10. Pe intervalul $[-1, 1]$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = \dfrac{3xy - x - y - 1}{xy + x + y - 3}$. Numărul elementelor simetrizabile este

A) infinit
B) 0
C) 2
D) 1

Soluţie: 10 *Dacă* $e \in [-1, 1)$ *este elementul neutru al legii de compoziţie avem că* $x * e = e * x = x$, $\forall x \in [-1, 1]$. *Deoarece legea de compoziţie este comutativă este suficient să ne ocupăm de* $e * x = x \Leftrightarrow \dfrac{3ex - e - x - 1}{ex + e + x - 1} = x \Leftrightarrow x^2(e+1) - 2x(e+1) + (e+1) = 0 \Leftrightarrow (e+1)(x-1)^2 = 0 \to e = -1$. *Dacă* $x' \in I$ *este simetricul elementului* x *atunci* $x * x' = x' * x = -1$. *Se obţine* $4xx' = 4 \to x' = \dfrac{1}{x}$. *Trebuie ca* $x' \in I \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} \in I \to x = -1$ *este singurul element simetrizabil.*
Răspunsul corect este D).

11. Mulţimea valorilor parametrului real m pentru care ecuaţia

$$x(x-1)(x-2)(x-3)=m$$

are toate rădăcinile reale este

A) $\left[-1, \frac{9}{16}\right]$

B) $\left[-1, \frac{9}{16}\right)$

C) $\left(-1, \frac{9}{16}\right)$

D) $\left(-1, \frac{9}{16}\right]$

Soluţie: 11 *Ecuaţia propusă se poate rescrie echivalent sub forma*

$$(x^2-3x)(x^2-3x+2)=m.$$

Dacă notăm cu $y=x^2-3x+1$ *relaţia anterioară se rescrie sub forma* $(y-1)(y+1)=m \Leftrightarrow y^2-1=m \Leftrightarrow y^2=m+1$. *Trebuie ca* $m+1\geq 0 \to m\geq -1$. *Din* $y=x^2-3x+1$ *rezultă că* $x^2-3x+1-y=0$ *de unde* $\Delta\geq 0$ *sau* $9-4(1-y)\geq 0 \Leftrightarrow 5+4y\geq 0$. *Pentru* $y=\sqrt{m+1}$ *inegalitatea* $5+4y\geq 0$ *se verifică. Pentru* $y=-\sqrt{m+1}$ *inegalitatea* $5+4y\geq 0$ *devine* $5-4\sqrt{m+1}\geq 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{m+1}\leq 5 \Leftrightarrow 16(m+1)\leq 25 \Leftrightarrow 16\leq 9 \Leftrightarrow m\leq \frac{9}{16}$. *Deci* $m\in\left[-1, \frac{9}{16}\right]$.
Răspunsul corect este A).

12. Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ unde $x_n=\left(\frac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{5}}{3}\right)^n$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ este:

A) $\sqrt[3]{30}$

B) $\ln\sqrt[3]{30}$

C) e

D) 1

Soluţie: 12 *Observăm că limita numărătorului este* 1 *prin urmare ne aflăm în cazul de nedeterminare* 1^∞. *Pentru eliminarea acesteia vom adăga şi vom scădea* 1 *la baza expresiei pentru a folosi limita remarcabilă;*

$$\lim_{u(x)\to 0}(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}=e$$

Vom nota $\frac{1}{n}=x$ *şi limita devine*

$$l=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x+3^x+5^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{2^x+3^x+5^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{2^x+3x^3+5^x-3}}\right]^{\frac{2^x+3^x+5^x-3}{3x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2^x-1}{3x}+\frac{3^x-1}{3x}+\frac{5^x-1}{3x}\right)}=e^{\frac{\ln 2+\ln 3+\ln 5}{3}}=\sqrt[3]{30}$$

Răspunsul corect este A).

13. Se consideră şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definite prin

$$x_{n+1}=a^{\frac{1}{(n+1)!}}\cdot x_n^{\frac{1}{n+1}}, x_1=1,\ b_n=\prod_{k=1}^{n}x_k,\ a\in\mathbb{R}^*, a>0.$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ este:

A) 0

B) 1

C) a

D) $+\infty$

Soluţie: 13 *Pentru a obţine o formă simplificată a şirului x_n vom scrie primii termeni ai şirului pentru a identifica o formulă generală*

$$x_1 = 1,\ x_2 = a^{\frac{1}{2!}}, x_3 = a^{\frac{2}{3!}}.$$

Presupunem că $P(n) : x_n = a^{\frac{n-1}{n!}}$ şi demonstrăm prin inducţie matematică

- *Pentru etapa de verificare observăm că $P(2)$ şi $P(3)$ adevărate.*
- *Pentru etape inductivă presupunem $P(k)$ adevărată şi demonstrăm că $P(k+1)$ adevărată.*

$$x_{k+1} = a^{\frac{1}{(k+1)!}} \cdot a^{\frac{k-1}{(k+1)!}} = a^{\frac{k}{(k+1)!}} \to \text{ P(k+1) adevărată.}$$

Se obţine

$$b_n = \prod_{k=1}^{n} x_k = \prod_{k=1}^{n} a^{\frac{k-1}{k!}} = a^{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!}}.$$

Putem scrie

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{k!} - \frac{1}{k!} \right) = 1 - \frac{1}{n!}.$$

În concluzie

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a^{1-\frac{1}{n!}} = a.$$

Răspunsul corect este C).

14. Fie x_{1m} cea mai mică rădăcină a ecuaţiei

$$x^2 - 2(m+1)x + 3m + 1 = 0.$$

Atunci $\lim\limits_{m\to\infty} x_{1m}$ este

A) 0

B) 1

C) $\dfrac{2}{3}$

D) $\dfrac{3}{2}$

Soluţie: 14 *Observăm că $\Delta = 4(m+1)^2 - 12m - 4 = 4m^2 + 8m + 4 - 12m - 4 = 4m^2 - 4m$. Cele două rădăcini vor fi*

$$x_{1m,2m} = m + 1 \pm \sqrt{m^2 - m}$$

Impunem condiţia ca $m \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ deci rădăcina cea mai mică va fi $x_1 = m + 1 - \sqrt{m^2 - m}$. Avem

$$\lim_{m\to\infty} x_{1m} = \lim_{m\to\infty} (m + 1 - \sqrt{m^2 - m}) = \lim_{m\to\infty} \frac{(m+1)^2 - m^2 + m}{m + 1 + \sqrt{m^2 - m}} = \lim_{m\to\infty} \frac{3m+1}{m + 1 + \sqrt{m^2 - m}} = \frac{3}{2}.$$

Răspunsul corect este D).

15. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$f(x) = \begin{cases} ae^x + b + e^{-x}, & \text{dacă } x \le 0 \\ x^2, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

şi fie $x_0 = 0$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A) Există o infinitate de perechi (a, b) pentru care f este continuă în punctul x_0.

B) f este derivabilă în punctul $x_0 \Leftrightarrow (a = 1$ şi $b = -2)$.

C) f este continuă în punctul $x_0 \Leftrightarrow a + b = -3$.

D) f este derivabilă în punctul $x_0 \Leftrightarrow (a = -2$ şi $b = 1)$.

Soluţie: 15 *Avem* $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = a + b + 1 = f(0)$ *şi* $\lim_{x \searrow 0} f(x) = 0$. *Drept urmare,* f *este continuă în* $x_0 = 0$ *dacă şi numai dacă* $a + b = -1$, *deci există o infinitate de perechi* (a, b) *pentru care* f *este continuă în* x_0. *De asemenea,* f *este derivabilă pe* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, *iar*

$$f'(x) = ae^x - e^{-x} \quad \textit{pentru orice } x < 0,$$
$$f'(x) = 2x \quad \textit{pentru orice } x > 0.$$

Se constată imediat că $\lim_{x \nearrow 0} f'(x) = a - 1$ *şi* $\lim_{x \searrow 0} f'(x) = 0$. *Presupunând că* $a + b = -1$ *(adică* f *este continuă în 0), în baza unei consecinţe a teoremei de medie a lui Lagrange rezultă că* $f'_s(0) = a - 1$ *şi* $f'_d(0) = 0$. *Drept urmare,* f *este derivabilă în* $x_0 = 0$ *dacă şi numai dacă* $a + b = -1$ *şi* $a - 1 = 0$, *adică dacă şi numai dacă* $a = 1$ *şi* $b = -2$.
Răspunsul corect este B).

16. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă şi $\lim_{x \to \infty} x^n \cdot f(x) = l$, l finită şi $n \in \mathbb{N}$ fixat. Dacă limita $\lim_{x \to \infty} x^{n+1} f'(x)$ există atunci valoarea ei este:

   A) $-nl$
   B) nl
   C) 0
   D) ∞

Soluţie: 16 *Vom utiliza regula lui L'Hospital*

$$l = \lim_{x \to \infty} x^n \cdot f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^{-n}} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{-nx^{n-1}} = -\frac{1}{n} \lim_{x \to \infty} x^{n+1} f'(x) \to \lim_{x \to \infty} x^{n+1} f'(x) = -nl.$$

Răspunsul corect este A).

17. Fie $F : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ astfel încât $F'(x) = \dfrac{1}{x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$ cu $F(-1) = 1$ şi $F(1) = 0$. Atunci $F(e) + F(-e)$ este:

   A) 1
   B) 0
   C) 3
   D) 2

Soluţie: 17 *Din enunţ rezultă că* $F(x) = \begin{cases} \ln(-x) + c_1, & x < 0 \\ \ln x + c_2, & x > 0 \end{cases}$. *DIn* $F(-1) = 1 \to c_1 = 1$, *iar din* $F(1) = 0 \to c_2 = 0$. *Deci*

$$F(x) = \begin{cases} \ln(-x) + 1, & x < 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}.$$

Rezultă $F(e) + F(-e) = 3$.
Răspunsul corect este B).

18. Fie $L = \lim_{a \to \infty} \int_0^a x\mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii este adevărată.

   A) $L = \infty$.
   B) $L = 1$.
   C) $L = \mathrm{e}$.
   D) L nu există.

Soluţie: 18 *Putem calcula integrala propusă spre analiză:*

$$\int_0^a -x(e^{-x})'dx = -xe^{-x}\Big|_0^a - e^{-x}\Big|_0^a = -ae^{-a} - e^{-a} + 1 \tag{4}$$

Deci $L = 1$.

Răspunsul corect este B).

19. Valoarea integralei $\int_{-1}^{1} \frac{x\,\mathrm{arctg}(x)}{1+e^x}dx$ este:

    A) $\frac{\pi}{2} - 1$
    B) $\frac{\pi}{2} + 1$
    C) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$
    D) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

Soluţie: 19 *Deoarece integrarea se face pe un interval simetric faţă de origine vom realiza schimbarea de variabilă $x = -t \to dx = -dt$.*

$$\begin{cases} x = 1 \to t = -1 \\ x = -1 \to t = 1 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{x\,\mathrm{arctg}(x)}{1+e^e}dx = \int_{-1}^{1} \frac{t}{\mathrm{arctg}\,t}1 + e^{-t}dt = \int_{-1}^{1} \frac{e^t t\,\mathrm{arctg}\,t}{1+e^t}dt = \int_{-1}^{1} \frac{xe^x\,\mathrm{arctg}\,x}{1+e^x}dx$$

Se obţine:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x\,\mathrm{arctg}(x)}{1+e^e}dx + \int_{-1}^{1} \frac{xe^x\,\mathrm{arctg}\,x}{1+e^x}dx = \int_{-1}^{1} x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{x^2}{2}\right)'\mathrm{arctg}\,x\,dx = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,x\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2(x^2+1)}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Deorece $\int_{-1}^{1} \frac{x\,\mathrm{arctg}(x)}{1+e^e}dx = \int_{-1}^{1} \frac{xe^x\,\mathrm{arctg}\,x}{1+e^x}dx$ *obţinem* $\int_{-1}^{1} \frac{x\,\mathrm{arctg}(x)}{1+e^e}dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$.

Răspunsul corect este C).

20. Fie vectorii $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}, \vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ şi $\vec{u} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$. Să se determine $p, q \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{u} = p\vec{a} + q\vec{b}$.

    A) $p = -3, q = -2;$
    B) $p = 0, q = 0;$
    C) $p = 4, q = 2;$
    D) $p = 7, q = 1;$

Soluţie: 20 *Înlocuind $\vec{a}, \vec{b}$ şi $\vec{u}$ în ultima egalitate, obţinem:*

$$6\vec{i} + 2\vec{j} = p(\vec{i} + \vec{j}) + q(\vec{i} - \vec{j}) \Leftrightarrow (p + q - 6)\vec{i} + (p - q - 2)\vec{j} = 0$$

Se observă că $\vec{i} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}), \vec{j} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$, deci:

$$\vec{u} = 6\vec{i} + 2\vec{j} = 6 \cdot \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + 2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = 3(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{a} - \vec{b} = 4\vec{a} + 2\vec{b} \Rightarrow p = 4, q = 2$$

Răspunsul corect este C).

21. Fie punctele $A(1,1),\ B(2,-3),\ C(6,0)$. Coordonatele punctului D astfel încât $ABCD$ este paralelogram sunt

    A) $(-4, 5)$

B) $(4,5)$
C) $(-5,-4)$
D) $(5,4)$

Soluţie: 21 *Patrulaterul $ABCD$ este paralelogram dacă şi numai dacă diagonalele se înjumătăţesc. Mijlocul diagonalei AC are coordonatele $\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)$. Punctul obţinut anterior este şi mijlocul diagonalei BD.Se obţine $D\,(5,4)$.*
Răspunsul corect este D).

22. Distanţa minimă de la punctul M de pa parabola $x^2 = 64y$ la dreapta $3x + 4y + 37 = 0$ este:

A) $\frac{1}{5}$
B) $\frac{1}{2}$
C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{4}$

Soluţie: 22 *Dacă punctul M este pe parabola $x^2 = 64y$ atunci $M\left(a,\frac{a^2}{64}\right)$. Utilizăm formula pentru distanţa de la un punct la o dreaptă şi obţinem*

$$d = \frac{\left|3a + 4\cdot\frac{a^2}{64} + 37\right|}{\sqrt{9+16}} = \frac{\left|3a + \frac{a^2}{16} + 37\right|}{5}.$$

Definim funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2}{16} + 3x + 37$ care are minimul egal cu 1 care este obţinut pentru $x = -\frac{b}{2a} = -24$ deci distanţa minimă va fi $\frac{1}{5}$.
Răspunsul corect este A).

23. Dacă $\operatorname{tg}\alpha = 1$, atunci valoarea expresiei $E = \cos\alpha - \sin\alpha$ este:

A) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$;
B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$;
C) 0 ;
D) 1 ;

Soluţie: 23 *Folosind în egalitatea din enunţ relaţia $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, rezultă*

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1 \Rightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha - \sin\alpha = 0.$$

Răspunsul corect este C).

24. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ o funcţie care admite primitive şi verifică relaţiile $\cos f(x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$ şi $|f(\pi) - \pi| \leq \pi$. Atunci $f(\pi)$ este:

A) 0
B) π
C) 2π
D) 4π

Soluţie: 24 *Din* $\cos f(x) = 1 \to f(x) = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. *Deoarece funcţia* f *admite primitive rezultă că* f *este constantă (altfel* $f(\mathbb{R}) = \{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ *care nu este interval). Deci* $\exists k_0 \in \mathbb{Z}$ *astfel încât* $f(x) = 2k_0\pi,\ \forall x \in \mathbb{R}$. *Din a doua condiţie obţinem* $(2k_0\pi - \pi) \leq \pi \to -1 \leq 2k_0 - 1 \leq 1 \to k_0 \in \{0, 1\}$. *Observăm că* $k_0 = 0$ *nu convine deoarece* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, *deci* $k_0 = 1 \to f(x) = 2\pi \to f(\pi) = 2\pi$.
Răspunsul corect este C*).*

25. Fie a şi b două numere reale astfel încât $\sin a + \sin b = 1$ şi $\cos a + \cos b = \frac{1}{2}$. Să se calculeze $cos(a - b)$.

A) $-\frac{3}{8}$

B) 1

C) $\frac{3}{8}$

D) $\frac{3}{16}$

Soluţie: 25 *Prin ridicarea la pătrat a ambelor relaţii obţinem:*

$$\begin{cases} \sin^2 a + 2\sin a \sin b + \sin^2 b = 1 \\ cos^2 a + 2\cos a \cos b + \cos^2 b = \frac{1}{4} \end{cases} \to cos(a - b) = -\frac{3}{8}$$

Răspunsul corect este A*).*